

MARIE-VIRGINIE SPELLER
DAVID BENTOUZA
PATRICK TROGLIA

CONCOURS GEIPI POLYTECH

Tout-en-un

DUNOD

Mise en page : Belle Page

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-083957-5

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord l'équipe d'édition pour sa disponibilité, son soutien et sa confiance. Enfin je remercie tous les élèves de Terminale et d'écoles d'ingénieur que j'ai pu encadrer en cours particuliers ou en Travaux Dirigés (TD). Leurs questions et leurs doutes m'ont permis de cerner les points qui leur posaient le plus de problèmes et d'insister ainsi sur les chapitres et les thèmes difficiles. J'espère que cet ouvrage répondra aux attentes des candidats au concours Geipi Polytech.
Bonne chance et bon travail à tous !

Marie-Virginie Speller

« Le travail est un trésor »

Jean de la Fontaine, *Le Laboureur et ses enfants*

TABLE DES MATIÈRES

Partie 2
Physique

Partie 5
Concours blancs

Introduction

LE CONCOURS GEIPI POLYTECH

Qu'est-ce qu'un concours ?

✓ Une nouvelle notation

Un concours est bien différent d'un examen, notamment par son élaboration et par sa notation. Jusqu'à présent, vous aviez l'habitude d'être évalué par le biais d'examens, c'est-à-dire qu'il vous suffisait d'avoir une note au moins égale à la moyenne (10/20) pour être reçu. C'est le cas du Baccalauréat ou du Brevet des collèges. Il en est de même pour les contrôles et les interrogations. Une telle épreuve est également conçue de manière à ce que vous puissiez faire l'ensemble du sujet dans le temps imparti. Vous avez ainsi la note 20/20 si vous répondez à tous les énoncés correctement.
Un concours se déroule de manière très différente. Tout d'abord, le sujet est élaboré de manière à ce que vous ne puissiez pas tout faire dans le temps octroyé. Ainsi vous pouvez obtenir la note maximale (20/20) à l'épreuve sans avoir traité le sujet entièrement. C'est pourquoi en général, les énoncés de concours paraissent interminables aux élèves !
Alors pas de panique ! Si vous n'avez pas répondu à toutes les questions ou pas traité tous les exercices et problèmes, vous pouvez tout de même avoir 20/20 ! Votre note dépend du meilleur candidat. Vous êtes noté et classé par rapport à la meilleure copie.
Vous êtes reçu en fonction de votre classement et non plus si vous obtenez une note supérieure ou égale à la moyenne. Par exemple vous pouvez échouer avec 11/20 et réussir avec une note telle que 9/20 ! Votre réussite est fonction du nombre de places offertes par chaque école.

✓ Un examen en trois étapes

Soignez votre dossier scolaire car il est pris en compte pour votre admission dans une école d'ingénieur post-bac : soyez attentif en classe et travaillez régulièrement !
En général, un concours se déroule en deux temps : une partie écrite et une partie orale. Si vous réussissez les écrits, c'est-à-dire, si vous êtes suffisamment bien classé, vous êtes *admissible*. Cela vous permet de vous présenter aux épreuves orales. Si vous réussissez ces dernières épreuves, vous êtes alors *admis*.

Le concours Geipi Polytech

✓ À qui le concours Geipi Polytech s'adresse-t-il ?

Il s'adresse aux élèves inscrits en :
– Terminale générale avec pour spécialités des matières scientifiques dont les mathématiques (spécialité mathématiques ou mathématiques complémentaires),
– Terminale STI2D (les 4 spécialités),
– Terminale STL (spécialité Sciences Physiques et Chimiques en Laboratoire),
– Étudiants bac + 1 titulaires d'un baccalauréat S, STI2D, STL (spécialité Sciences Physiques et Chimiques en Laboratoire).

✓ Choix des spécialités

Classe de première	Classe de terminale
Spécialité mathématiques + spécialité physique-chimie + Un 3e enseignement de spécialité de votre choix	Spécialité mathématiques (ou à défaut l'option maths complémentaires) Complété par l'un des enseignements de spécialité suivants : physique-chimie, Sciences de la Vie et de la Terre, Numérique et Sciences Informatiques, Sciences de l'Ingénieur ou Biologie écologie

✓ Quelles écoles ?

Vous concourez pour intégrer une école d'ingénieur post-bac. Les études durent en général 5 ans. À l'issue de ces cinq années vous êtes « ingénieur » et avez le niveau « bac + 5 ».
Le concours Geipi Polytech permet l'accès à 34 grandes écoles d'ingénieur :

- ❖ Agro Sup Dijon
- ❖ EEIGM Nancy – groupe INP
- ❖ ENIB Brest
- ❖ ENIM Metz
- ❖ ENISE Saint-Etienne
- ❖ ENIT Tarbes
- ❖ ENSG SI Nancy – groupe INP
- ❖ ENSIBS Lorient-Vannes
- ❖ ESGT Le Mans
- ❖ ENSIM Le Mans
- ❖ ESIREM Dijon
- ❖ ESIROI La Réunion
- ❖ ESISAR Valence – Grenoble INP
- ❖ IMT Lille Douai
- ❖ ISAT Nevers
- ❖ ISEL Le Havre
- ❖ ISTY Vélizy-Mantes
- ❖ Sup Galilée Paris
- ❖ Telecom Saint-Étienne
- ❖ Polytech Annecy-Chambéry
- ❖ Polytech Angers
- ❖ Polytech Clermont-Ferrand
- ❖ Polytech Grenoble
- ❖ Polytech Lille
- ❖ Polytech Lyon

❖ Polytech Marseille
❖ Polytech Montpellier
❖ Polytech Nancy
❖ Polytech Nantes
❖ Polytech Nice-Sophia
❖ Polytech Orléans
❖ Polytech Paris-Sud
❖ Polytech Paris-Sorbonne
❖ Polytech Tours

Conseils

- Renseignez-vous sur le programme et les matières enseignées dans ces écoles.
- Consultez les sites Internet, rendez-vous aux portes ouvertes, etc. Choisissez une école qui vous convient en termes d'enseignements et de spécialités. Informez-vous aussi sur les débouchés professionnels.

✓ Quels débouchés ?

À l'issue de votre école d'ingénieur, vous accéder au titre d'ingénieur et avez désormais un « bac + 5 ». Vous avez lors un large panel de métiers dans l'ingénierie qui s'offrent à vous. Vous pouvez aussi compléter votre formation avec un troisième cycle dans une école de commerce ou dans une université (master 2).
Un conseil : Choisissez vos stages dans des domaines professionnels qui vous plaisent. Si vous êtes passionné(e) par les voitures, orientez-vous vers un stage dans l'industrie automobile, si vous êtes passionné(e) de mode, postulez dans une maison de couture, etc. Si vous ne savez pas vraiment ce que vous voulez faire, tentez des stages dans des secteurs différents afin d'avoir une idée plus précise de vos souhaits professionnels.

✓ Comment s'inscrire ?

L'inscription au concours Geipi Polytech s'effectue exclusivement sur **Internet** via le site **Parcoursup** entre janvier et mars de l'année de passation des épreuves. Les dates exactes sont communiquées au cours du premier trimestre de terminale.
La marche à suivre est la suivante :
– Connectez-vous avec votre identifiant et votre mot de passe.
– Cliquez sur l'onglet « Vœux » puis « Rechercher une formation ».
– Sélectionnez une école du concours Geipi Polytech et listez-la dans vos vœux. Cela vous donne accès à toutes les autres écoles du concours.
– Fournissez les pièces demandées par le serveur en vous laissant guider.

Attention
Il n'y a pas de document papier ! Tout se fait par informatique.

– Validez votre vœu Concours GEIPI Polytech avant fin mars de l'année de passation du concours.

Attention
N'attendez pas le dernier moment pour valider vos vœux !

✓ **Important**

Le concours Geipi Polytech compte pour **un seul** vœu parmi les 10 possibles.
Les écoles du concours Geipi Polytech (au total 34) comptent pour zéro sous-vœu parmi les 20 possibles. Vous pouvez conserver les 34 écoles ou bien ne sélectionner que celles qui vous intéressent.
Les frais d'inscription s'élèvent à 60 €. Les élèves boursiers sont exonérés de cette contribution.

✓ **Comment se déroule le concours ?**

Vous êtes inscrit en Terminale l'année scolaire à la fin de laquelle vous passez le concours
Tout d'abord votre dossier de classe de Première et Terminale est consulté par les membres du jury. Notamment vos notes de Première de spécialité Mathématiques et de spécialité Physique-Chimie, votre note d'Anglais, vos notes de Terminale de Spécialité Maths (ou de l'option maths complémentaires), de la 2e spécialité scientifique suivie et d'Anglais, ainsi que votre note de Bac français.
⇒ Si ces notes sont suffisamment élevées, vous êtes convoqué seulement pour l'entretien de motivation. Les coefficients sont les suivants :

	Durée	**Coefficient**
Dossier (notes de 1re et Terminale)		8
Entretien de motivation	25 min	2

⇒ Si celles-ci ne sont pas jugées suffisamment élevées, vous êtes convoqué pour les épreuves écrites et si celles-ci sont concluantes, vous êtes convoqué par la suite pour un entretien de motivation.
L'épreuve écrite du concours Geipi Polytech comporte un sujet de mathématiques et un sujet à choisir parmi l'une de ces 4 matières : physique-chimie, numérique et sciences informatiques, SVT ou sciences de l'ingénieur avec un temps imparti de 3 h. Le temps conseillé à consacrer est de 2 h pour les mathématiques et de 1 h pour la partie sciences. Pour chaque matière vous devez traiter trois exercices parmi les quatre proposés.

Remarque
Seule une partie du sujet de mathématiques sera accessible aux candidats ayant suivi la spécialité maths complémentaires en Terminale.

Tableau récapitulatif :

	Durée	**Coefficient**
Dossier (notes de 1re et Terminale)		4
Mathématiques	2 h	3
2e spécialité scientifique	1 h	3
Entretien de motivation	25 min	2

Pour les élèves bac+1
Les notes prises en compte sont les notes obtenues au baccalauréat.

Je me prépare au concours !

✓ Je soigne mon dossier scolaire car celui-ci est consulté par les membres du jury du concours

✓ Je prépare les écrits

⇒ *Vous travaillez seul(e).* Procurez-vous un manuel d'exercices corrigés ou consultez les tests corrigés sur Internet. Exercez-vous en commençant par des questions d'entraînement afin de déceler vos points faibles, puis accentuez vos révisions sur les thèmes qui vous posent le plus de problèmes. Élaborez enfin un planning (que vous respecterez !) afin de vous donner des objectifs à court et moyen termes.

⇒ *Vous optez pour de l'aide extérieure.* Si vous rencontrez des difficultés à travailler seul(e), vous pouvez toujours faire appel à des organismes de cours particuliers à domicile ou bien suivre un stage intensif de préparation.

	Cours particuliers	Stages collectifs
Avantages	• Flexibilité des horaires • Pas de déplacement • Vous avez plus de temps pour aborder les points qui vous posent problème. Vous avez une aide personnalisée • Vous pouvez poser des questions en dehors du regard des autres	• Les questions des uns peuvent aider les autres • En groupe, vous abordez plusieurs manières de résoudre les exercices • Vous rencontrez des personnes qui passent le même examen que vous et pouvez ainsi échanger avec eux. Cela peut avoir un effet rassurant.
Inconvénients	• Vous êtes seul(e) et ne rencontrez personne passant le même examen • Vous n'avez pas d'autres points de vue	• Les horaires et les déplacements sont moins flexibles • Le professeur est moins disponible que dans le cas d'un cours particulier
Conclusion	• Le cours particulier permet d'approfondir les notions que vous n'avez pas bien comprises et d'avancer plus rapidement. • Vous sélectionnez les points sur lesquels vous souhaitez travailler en priorité. • Choisissez cette option dans le cas où vous n'avez que très peu de temps pour passer le test ou bien si très peu de points vous posent problème.	• Le stage intensif vous confronte aux réalités du test en rencontrant d'autres personnes qui le passent. • Si vous optez pour cette option, vous devez au préalable réviser quelques notions afin de ne pas être perdu en route. Le professeur est beaucoup moins disponible que dans le cas d'un cours particulier, vous ne pourrez pas lui poser toutes vos questions.

	Cours particuliers	Stages collectifs
Attitude à adopter	• Préparez des questions avant l'arrivée de votre professeur. • Cherchez des exercices pour la séance suivante afin de savoir où vous avez des difficultés et pouvoir les combler avec votre professeur. • Sélectionnez des thèmes que vous souhaitez aborder au prochain cours.	• Préparez des questions et des notions que vous souhaiteriez aborder en stage. • Relisez vos notes prises dans la journée le soir en rentrant chez vous. • Faites le travail que le professeur vous donne d'un jour à l'autre. cela vous permet de mieux saisir les explications lors de la correction.

✓ Conseils : À emporter avec vous le jour du concours !

Soyez reposé(e) (pas de fête la veille !) car ce test exige une énorme concentration et une grande vivacité d'esprit. Les questions sont rédigées en anglais, ce qui rajoute une difficulté supplémentaire. Lisez très attentivement les énoncés des questions et des différentes propositions. Il peut y avoir des subtilités dans le langage. Faites bien attention à ce que l'on vous demande.
Vous êtes pénalisé en cas de mauvaise réponse. Relisez-vous et ne faites pas confiance au hasard ! Si vous ne parvenez pas à résoudre un problème, optez pour la proposition qui vous semble la plus plausible. Procédez par élimination, certains résultats en mathématiques sont impossibles (par exemple un carré ou une longueur ne peuvent pas être négatifs, etc.). Cela réduit en général le choix à 2 ou 3 propositions. Si vraiment vous ne trouvez pas, revenez plus tard sur cette question et passez à la suite !

✓ Je prépare l'oral

Si vous avez réussi les épreuves écrites, vous êtes admissible. Dans ce cas, il vous reste une épreuve orale, à savoir un entretien de motivation. Il dure 25 minutes et a pour but d'évaluer votre motivation.
Comment réussir votre entretien de motivation ?

1. La veille de l'entretien

Lisez les journaux, écoutez la radio, regardez les infos : on ne sait jamais, vous pouvez avoir une question d'actualité !
Repérez le parcours exact et le temps qu'il vous faut pour vous rendre sur les lieux. Faites éventuellement le trajet avant le jour du rendez-vous.
Situez bien la salle où se déroule l'entretien (bâtiment, étage, etc.).
Optez pour le mode de transport le plus rapide : par exemple évitez de prendre un taxi ou le bus aux heures de pointe, vous risquez d'être bloqué(e) dans les embouteillages. Préférez le métro pour ce type d'horaires !
Préparez bien vos affaires : documents à apporter (convocation, pièce d'identité, etc.), cintrez les vêtements (bien repassés) pour qu'ils soient impeccables le jour J.
Détendez-vous la veille : un cinéma, une exposition, un théâtre, un plateau-télé, etc.
Optez pour un repas léger le soir : cela facilite la digestion et votre sommeil sera de meilleure qualité !
Ne veillez pas trop tard ! Rien de tel qu'une bonne nuit de sommeil pour être en forme et limiter les effets indésirables du stress !

2. Tenue correcte exigée !

Lorsque vous passez un entretien, vous rencontrez d'abord une personne que vous ne connaissez pas avec ses *a priori* et ses convictions. On dit souvent que « la première impression est la bonne » et c'est souvent le cas. Habillez-vous donc de manière sobre et correcte, mais aussi et surtout choisissez des vêtements dans lesquels vous vous sentez bien !

Voici les tenues à proscrire et celles à choisir pour un entretien ! Profitez des soldes !

Pour les filles :

Oubliez !	Oui, oui et oui !
• Mini-jupe • Décolleté plongeant • Pantalons de jogging ou leggins : vous n'allez pas à la gym ! • Débardeurs : vous n'allez pas à la plage • Jeans : trop décontracté • Pantalons, jupes ou vestes de couleur trop vives • Vêtements originaux ou trop « mode » (jupes asymétriques, shorts, etc.) : vous n'allez pas à un défilé de mode ! • Talons d'une hauteur supérieure à 5 cm : ce n'est pas approprié pour un entretien et en plus c'est impossible de marcher avec de telles chaussures ! • Chaussures de sport : vous n'allez pas à un match de foot !	• Tailleur jupe ou pantalon de couleur foncée (en hiver) ou de couleur claire (en été). • Optez dans ce cas pour un haut de couleur vive pour donner un peu de « peps » à votre allure. • Vous pouvez aussi choisir un haut de couleur pastel, c'est selon vos goûts !

Et le maquillage ? Et la coiffure ?

– Le maquillage doit être sobre et le teint naturel. Vous ne devez pas vous transformer en pot de peinture ! Prenez un anticerne pour masquer les signes de fatigue et les rougeurs éventuels. Une poudre de la couleur de votre teint pour donner bonne mine et le tour est joué ! Un peu de mascara ou de crayon noir si vous voulez, mais allez-y doucement sur les quantités !
– Pour la coiffure, vous avez le choix. Chignon, ou cheveux détachés mais toujours bien soignés.

Pour les garçons :

Oubliez !	Oui, oui et oui !
• Pantalons et vestes de couleur trop vives • Pantalons de jogging : vous n'allez pas faire votre footing ! • Vêtements originaux ou trop « mode » (chemises bariolées, chemises asymétriques, shorts, etc.) : vous n'allez pas à un défilé de mode ! • T-shirt imprimé : vous n'êtes pas à la plage • Chaussettes blanches : avec un costume de couleur sombre, ce n'est pas possible ! • Chaussures de sport : vous n'allez pas à un match de foot !	• Costume chemise ou costume cravate. • Optez pour un costume de couleur sombre et préférez des tons pastel pour la chemise. Évitez les couleurs vives. • Enfin les chaussettes doivent être de couleur sombre.

Et le rasage ? Et la coiffure ?

Vous devez être rasé de près pour un entretien.

Pour la coiffure, vous avez le choix, mais optez pour quelque chose de simple et sobre. Vous pouvez utiliser du gel sans toutefois vider le pot !

Attention !

- Les habits doivent être à votre taille ! Vous devez être à l'aise dedans ! Un entretien est déjà stressant par définition, alors n'en rajoutez pas avec une tenue inconfortable !
- Mettez des vêtements impeccables : propres (on évite de manger un croissant à la confiture sur la route, gare aux tâches de dernière minute !) et repassés (même si vous n'êtes pas un/une pro du repassage, faites un effort !)
- Être élégant(e) pour un entretien ne signifie pas être démodé(e) ! Il s'agit de donner une image de soi sérieuse et sobre. Vous devez vous fondre dans la masse et ne pas trop jouer la carte de l'originalité pour l'habillement !
- Que ce soit pour les vêtements, le maquillage ou la coiffure, vous devez vous sentir bien. Restez avant tout vous-même. Par exemple, si vous n'avez pas l'habitude de vous maquiller, ne mettez pas de maquillage. Ne faites rien qui pourrait vous mettre mal à l'aise. Cela ne ferait qu'accentuer votre stress.
- Une mise en beauté en accord avec votre personnalité peut toutefois vous donner une certaine force au niveau de la confiance en vous pour l'entretien !

3. Les indispensables à glisser dans votre sac à main ou serviette !

– Un paquet de mouchoirs.
– Un stylo et du papier pour éventuellement prendre des notes.
– Un plan de la ville où a lieu votre entretien.
– Le numéro de ligne directe de la personne avec qui vous avez rendez-vous au cas où vous auriez du retard.
– Pour les filles, prenez une paire de collants de rechange dans votre sac. Vous n'êtes pas à l'abri de les filer sur le trajet.
– Une brosse à cheveux : s'il y a du vent, cela vous permet de vous recoiffer !
– Un miroir de poche pour les dernières retouches !

4. La politesse est de rigueur !

Les règles de politesse et de bienséance font la différence entre deux profils à compétences égales. Arrivez à l'heure ! Un retard, même justifié, reste un retard. Dites bonjour et surtout remerciez la personne qui vous a reçu(e). N'oubliez pas que votre interlocuteur vous donne de son temps et vous offre donc une chance de réussir votre entrée en école de commerce et réaliser ainsi une partie de vos ambitions. Alors la moindre des choses, c'est de lui dire MERCI à la fin de l'entretien.

Vous pouvez vous documenter pour en savoir plus sur les règles de bonne conduite. En voici quelques-unes :

– Pas de chewing-gum !
– Ne passez pas devant la personne, ne lui barrer le passage.
– Attendez que la personne vous propose de vous asseoir.
– Tenez-vous droit(e).
– Évitez les contractions du style chui, chépa, etc. Votre interlocuteur n'est pas votre copain !
– Vouvoyez toujours un examinateur, le tutoiement n'est pas approprié lors d'un entretien.
– Ne vous plaignez pas (fatigue, migraine, grippe, etc.) ! Tout va bien !

Voici les locutions ou expressions à proscrire et celles que vous pouvez employer !

Oubliez !	Dites plutôt…
• Ouais • Salut • Bonjour Madame + nom de famille ou bonjour Monsieur + nom de famille • Mots grossiers • Tutoyer l'interlocuteur (même s'il fait jeune) • Chui passionné(e), chépas, etc. • OK • Salut, Bye	• Oui • Bonjour Madame, bonjour Monsieur (ne pas citer le nom de la personne) • Zut, mince, flûte, etc. • Toujours vouvoyer votre interlocuteur • Je suis passionné(e), je ne sais pas • D'accord, très bien, etc. • Au revoir Madame, au revoir Monsieur

5. Pas de fautes de français !

Attention aux fautes de français qui sont nombreuses dans le langage parlé. Encore une fois, vous n'allez pas voir un copain ou une copine mais une personne que vous ne connaissez pas. Voici quelques exemples de locutions ou expressions à proscrire et celles à employer !

Oubliez !	Dites plutôt…
• J'ai jamais entendu parler de ce livre • Pour pallier à ce problème, je vais réviser plus • Ce que je rêve… • Le livre à mon frère	• Je n'ai jamais entendu parler de ce livre • Pour pallier ce problème, je vais réviser plus • Ce dont je rêve… • Le livre de mon frère

6. Pas de mensonges !

Ne mentez pas sur votre profil. Cela se voit tout de suite. N'oubliez pas que les examinateurs ont l'habitude de faire passer des entretiens et reconnaissent tout de suite un mensonge !

– N'inventez pas des expériences professionnelles.
– Pour les langues étrangères, ne vous qualifiez pas de bilingue sans que cela soit vrai et archi vrai ! Dites plutôt que vous maîtrisez bien la langue en question. Par exemple bilingue anglais signifie que vous parlez aussi bien l'anglais que le français. Pire encore si vous ne connaissez pas du tout une langue, ne dites pas que vous la parlez car votre interlocuteur peut tester vos compétences et continuer l'entretien dans cette langue ! On vous laisse imaginer la suite…
– Ne mentez pas non plus sur vos notes, l'examinateur a pris connaissance de votre dossier scolaire.
– Ne vous inventez pas des compétences : ne dites pas que vous maîtrisez des logiciels sans parfaitement les connaître, parlez plutôt de quelques notions. Vous avez le droit de ne pas tout savoir ! Vous entrez en école d'ingénieur pour apprendre !

7. Ne dénigrez pas vos profs ou vos anciens employeurs !

Ne dites pas du mal de vos profs. Si vous avez un dossier scolaire moyen, ce n'est pas de leur faute ! Reconnaissez vos faiblesses si vous en avez. Personne n'est parfait. Mais ne reportez jamais la faute sur les autres !

Évoquez plutôt votre capacité à vouloir et donc pouvoir progresser rapidement.

8. Ne vous attardez pas sur vos faiblesses et ne soyez pas fataliste !

N'évoquez pas vos échecs ou vos défauts sauf si on vous le demande (*cf.* questions pièges).

Ne soyez pas fataliste : vous n'êtes peut-être pas très bon dans une matière aujourd'hui, mais cela peut changer ! Ce n'est pas une fatalité, dites que vous êtes prêt(e) à vous remettre à niveau en travaillant pendant les vacances…

Parlez de préférence de ce que vous savez faire.
Vous pouvez également évoquer vos activités extrascolaires (sauf les soirées arrosées, évidement !)

9. Gérez les questions pièges… et vos émotions !

Si on vous demande de citer vos défauts : choisissez ceux qui sont compatibles avec une scolarité en école d'ingénieur ! Optez pour ceux qui peuvent être considérés comme des qualités. Par exemple si vous dites que vous vous dispersez trop, l'examinateur peut comprendre que vous vous intéressez à beaucoup de choses et donc que vous avez une personnalité intéressante. Mais attention à la tournure de la phrase : dites plutôt que vous pratiquez beaucoup d'activités mais qu'en école d'ingénieur, vous privilégierez votre carrière future.
Si on vous demande vos qualités, soyez naturel(le), mais n'en faites pas trop !
Si l'examinateur emploie un ton sévère ou cassant, ne vous mettez à pleurer ! C'est en général pour vous tester votre réaction ! Ne perdez pas vos moyens !
Exemples de questions pièges :

Questions	Conseils
Comment vos amis vous perçoivent-ils ?	Cette question revient à donner des exemples de vos qualités ou défauts.
Comment expliquez-vous votre changement de parcours ?	Si vous avez changé de parcours, il faut être cohérent dans votre discours et expliquer pourquoi. Par exemple vous pouvez répondre : « j'ai voulu tenter plusieurs activités pour être sûr(e) de mes choix… ».
Comment vous voyez-vous dans 10 ans ?	Soyez sincère ! Si vous ne savez pas, ce qui est légitime, essayez tout de même d'exprimer quelques envies (poste en France ou à l'étranger, poste dans un domaine en particulier, etc.).
Question d'actualité	Lisez l'actualité avant l'entretien au cas où ! Cela peut servir !
Question embarrassante ou inappropriée	Vous n'êtes pas obligé(e) de répondre à une question qui vous paraît inadaptée (question portant sur votre famille, votre histoire personnelle, votre vie privée, votre santé, vos revenus, etc.).

10. Comment terminer l'entretien en beauté ?

Ne demandez pas à l'interlocuteur si vous avez réussi votre entretien, cela pourrait l'énerver ou l'irriter. Soyez patient(e) ! C'est difficile (on le sait et on vous comprend !), mais si vous avez réalisé une belle performance, vous risquez de tout gâcher !

PARTIE 1

Mathématiques





Chapitre 1

LA GÉOMÉTRIE

Je fais le point sur mes connaissances

✓ Propriétés dans un triangle

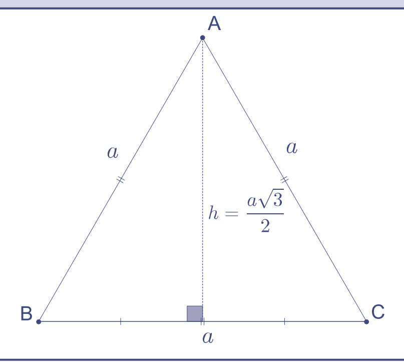
<table>
<tr>
<td>

Hauteur d'un triangle équilatéral

ABC est un triangle équilatéral de côté a

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

</td>
<td>

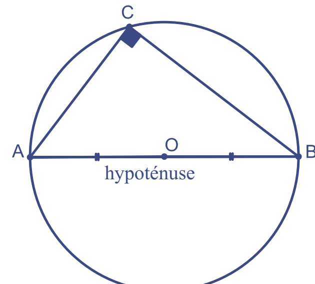


</td>
</tr>
<tr>
<td>

Triangle inscrit dans un cercle

Tout triangle inscrit dans un cercle et dont un côté est un diamètre de ce cercle est rectangle.
L'hypoténuse est un diamètre de ce cercle.

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

Médiane et longueur

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$$

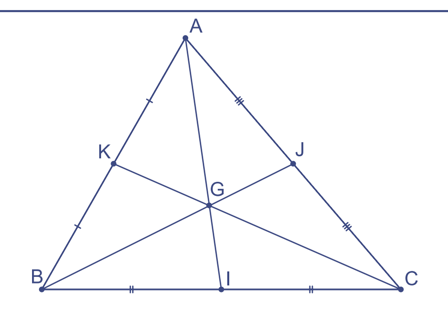
$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$$



où G est le centre de gravité du triangle ABC.

</td>
<td>

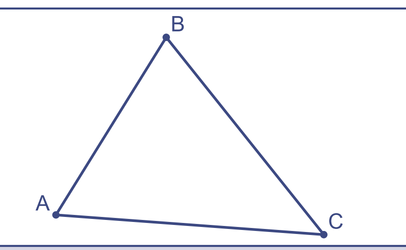


</td>
</tr>
<tr>
<td>

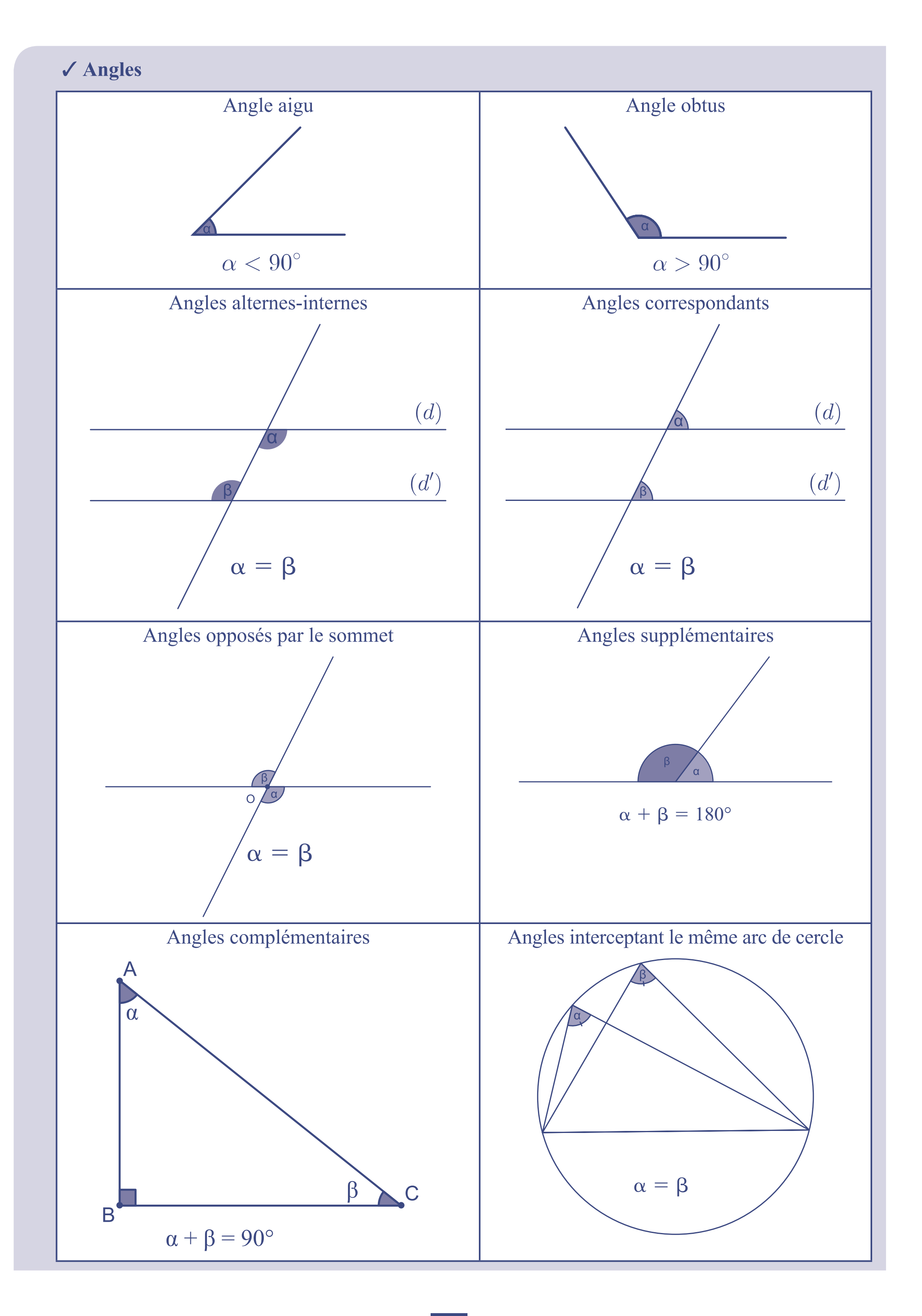
Inégalité triangulaire

AB + BC > AC

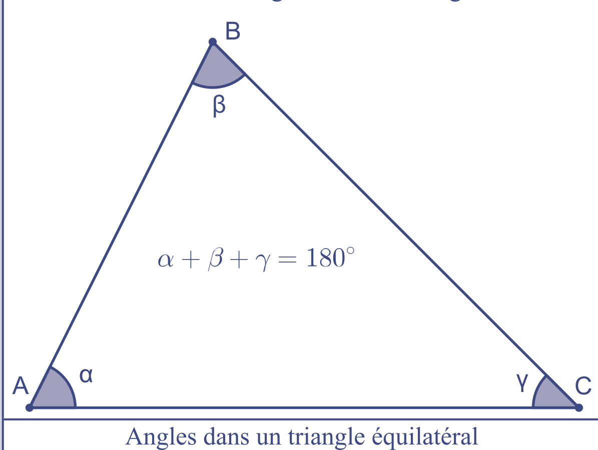
</td>
<td>



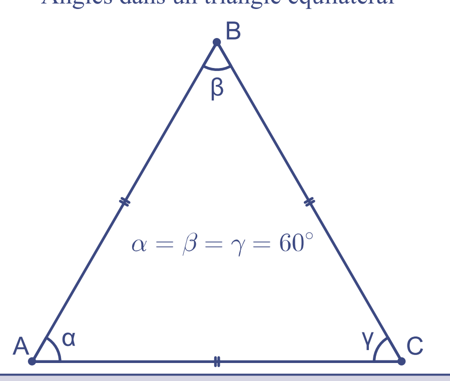
</td>
</tr>
</table>


✓ Angles
Angle aigu
α
α < 90°
Angle obtus
α
α > 90°
Angles alternes-internes
(d)
(d′)
α
β
α = β
Angles correspondants
(d)
(d′)
α
β
α = β
Angles opposés par le sommet
β
O
α
α = β
Angles supplémentaires
β
α
α + β = 180°
Angles complémentaires
A
α
B
β
C
α + β = 90°
Angles interceptant le même arc de cercle
β
α
α = β

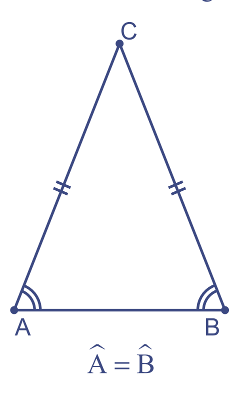
Somme des angles dans un triangle



Angles dans un triangle équilatéral



Angles à la base d'un triangle isocèle



✓ Périmètres, aires et volumes

	Périmètre	Aire
Triangle A, B, C, h, base	somme des côtés	$\frac{\text{base} \times h}{2}$

	Périmètre	Aire
Carré de côté *c* (A, B, C, D, c)	$4c$	$c \times c = c^2$
Rectangle (A, B, C, D, l, L)	$2 \times (L + l)$	$L \times l$
Cercle de rayon *R* (O, R)	$2\pi R$	πR^2
Trapèze (A, B, C, D, h; b = petite base; B = grande base)	somme des côtés	$\frac{(B+b)\times h}{2}$

	Aire	Volume
Cube A, B, C, D, E, F, G, H ; a	$6a^2$	a^3
Parallélépipède rectangle A, B, C, D, E, F, G, H ; h, p, L	$2 \times (Lp + hp + Lh)$	Lhp
Sphère de rayon *R* O, R	$4\pi R^2$	$\frac{4}{3}\pi R^3$
Demi-sphère de rayon *R* O, R	$2\pi R^2$ si la demi-sphère est vide. $3\pi R^2$ si la demi-sphère est pleine.	$\frac{2}{3}\pi R^3$

	Aire	Volume
Pyramide	Aire de base + aire des surfaces latérales (qui sont des triangles)	$\dfrac{\text{Aire de base} \times h}{3}$
Cylindre	$2\pi R^2 + 2\pi Rh$	$\pi R^2 h$
Cône de révolution	$\pi RL + \pi R^2$ où $L = \sqrt{R^2 + h^2}$	$\dfrac{\pi R^2 h}{3}$

Je sais maîtriser

✓ Les problèmes de géométrie euclidienne (théorème de Pythagore, théorème de Thalès, droites remarquables d'un triangle, propriétés du triangle rectangle, etc.)

✓ Déterminer le périmètre et l'aire d'une figure plane ainsi que l'aire et le volume d'une figure de l'espace.

✓ Déterminer les coordonnées d'un point, d'un vecteur, du milieu d'un segment

✓ Montrer l'alignement de trois points

✓ Calculer la longueur d'un segment en fonction des coordonnées de ses points situés aux extrémités

✓ Vérifier qu'un point appartient bien à un ensemble (droite, plan, cercle, etc.). Vous devez vérifier pour cela que ses coordonnées vérifient l'équation de cet ensemble.

✓ Calculer la distance d'un point à une droite, à un plan

Distance d'un point $M(x_M\,;\,y_M)$ à une droite d d'équation $ax + by + c = 0$:

$$\frac{|a \times x_M + b \times y_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Distance d'un point $M(x_M\,;\,y_M\,;\,z_M)$ à un plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$:

$$\frac{|a \times x_M + b \times y_M + c \times z_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

✓ Calculer le produit scalaire de deux vecteurs

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

✓ Déduire des informations à partir d'un produit scalaire (orthogonalité ou colinéarité de deux vecteurs, etc.)

✓ Déterminer un lieu géométrique à partir d'une relation

Relation	Lieu géométrique
$AM = a$, $a > 0$	Cercle de centre A et de rayon a
AM = BM	Médiatrice de [AB]
$(AM) \perp (BM)$	Cercle de diamètre [AB]
$(AM) \perp (AB)$	Perpendiculaire à (AB) passant par A

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1 — Le produit scalaire

Pour chaque item, sélectionnez la bonne réponse.

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, que vaut $\vec{u} \cdot \vec{v}$?

❒ **A.** $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$

❒ **B.** $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$

❒ **C.** $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos^2\left(\vec{v}, \vec{u}\right)$

❒ **D.** $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin\left(\vec{v}, \vec{u}\right)$

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, que pouvez-vous déduire de la relation $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$?

❒ **A.** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

❒ **B.** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

❒ **C.** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux en norme

❒ **D.** Vous ne pouvez rien déduire de cette égalité

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

3. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs, que vaut $\vec{u} \cdot \vec{v}$?

❒ **A.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$

❒ **B.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -8$

❒ **C.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$

❒ **D.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$

❒ **E.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$

Exercice 2 — Problème d'aires et de volumes

Pour chaque item, sélectionnez la bonne réponse.

4. Que vaut l'aire de la figure sachant que la demi-sphère est pleine et que R = 4 cm ?

❒ **A.** $12\,\pi$ cm^2

❒ **B.** $48\,\pi$ cm^2

❒ **C.** $\dfrac{256}{3}\,\pi$ cm^3



❒ **D.** On ne peut pas calculer l'aire de cette figure

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

5. Que vaut le volume de cette même figure ?

❒ **A.** $12\ \pi\ \text{cm}^2$

❒ **B.** $48\ \pi\ \text{cm}^2$

❒ **C.** $\frac{128}{3}\ \pi\ \text{cm}^3$

❒ **D.** $\frac{256}{3}\ \pi\ \text{cm}^3$

❒ **E.** $256\ \pi\ \text{cm}^3$

Exercice 3 Un peu de géométrie analytique !

Pour chaque item, sélectionnez la bonne réponse.

6. Quelle est la nature du triangle ABC sachant que A(0 ; 1), B(2 ; 2) et C(2 ; 0) ?

❒ **A.** Rectangle isocèle

❒ **B.** Rectangle

❒ **C.** Équilatéral

❒ **D.** Isocèle

❒ **E.** Il est impossible de répondre à la question

7. Quelle est la représentation correspondant à l'équation $(x - 2)^2 + y^2 = 4$?

❒ **A.** Cercle de centre (0 ; 2) et de rayon 4

❒ **B.** Cercle de centre (2 ; 0) et de rayon 2

❒ **C.** Sphère de centre (0 ; 2) et de rayon 2

❒ **D.** Parabole de sommet (2 ; 0)

❒ **E.** Il est impossible de répondre à la question

8. Quelle est la distance du point M(1 ; 2 ; 0) au plan d'équation $x + 2y + 3z + 5 = 0$?

❒ **A.** $\frac{5}{7}\sqrt{14}$

❒ **B.** $\frac{2}{3}\sqrt{15}$

❒ **C.** $\frac{1}{3}\sqrt{14}$

❒ **D.** $\frac{7}{3}\sqrt{15}$

❒ **E.** $\frac{11}{3}\sqrt{15}$

9. Quelle est la distance du point M(1 ; 2) à la droite d'équation $y = 2x + 4$?

❒ **A.** $\frac{4}{3}\sqrt{5}$

❒ **B.** $\frac{4}{5}\sqrt{5}$

❒ **C.** 0

❒ **D.** $\sqrt{2}$

❒ **E.** $\sqrt{5}$

10. Soient A(1 ; 2 ; 3), B(2 ; 4 ; 5) et C(0 ; 0 ; 1). Quelle est l'affirmation exacte au sujet des points A, B et C ?

❒ **A.** A, B et C sont alignés

❒ **B.** Le triangle ABC est rectangle

❒ **C.** Le triangle ABC est isocèle

❒ **D.** Le triangle ABC est équilatéral

❒ **E.** Aucune de ces affirmations n'est exacte

Exercice 4 Ensembles de points

Pour chaque item, sélectionnez la bonne réponse.

11. L'ensemble des points M vérifiant $MA = MB$ est :

❒ **A.** La médiatrice de [AM]

❒ **B.** La médiatrice de [AB]

❒ **C.** La perpendiculaire à (AB) passant par M

❒ **D.** Le cercle de diamètre [AB]

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

12. L'ensemble des points M vérifiant $AM = a$ où a est strictement positif est :

❒ **A.** Le cercle de diamètre [AM]

❒ **B.** La médiatrice de [AM]

❒ **C.** Le cercle de centre M et de rayon a^2

❒ **D.** Le cercle de centre A et de rayon a

❒ **E.** Le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{a}$

13. L'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est :

❒ **A.** Le cercle de diamètre [AB]

❒ **B.** La médiatrice de [AB]

❒ **C.** Le cercle de centre M

❒ **D.** Le cercle de centre A et de rayon [AB]

❒ **E.** L'ensemble vide.

14. L'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = 0$ est :

❒ **A.** Le cercle de diamètre [AB]

❒ **B.** La médiatrice de [AB]

❒ **C.** La perpendiculaire à (AB) passant par A

❒ **D.** Le cercle de centre A et de rayon [AB]

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

15. Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. L'ensemble des points M vérifiant $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = AB$ est :

❒ **A.** Le cercle de diamètre [AB]

❒ **B.** Le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{3}AB$

❒ **C.** Le cercle de centre G et de rayon 3AB

❒ **D.** Le cercle de centre G et de rayon AB

❒ **E.** Le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{3}AB$

CORRIGÉS

1. Réponse A. Par définition du produit scalaire, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

2. Réponse B. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux par définition de l'orthogonalité.

3. Réponse C. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ deux vecteurs, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1 \times (-5) + 2 \times 2$ $= -5 + 4 = -1$ en utilisant la formule $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$ où $\vec{u} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

4. Réponse B. L'aire (ou la surface) d'une demi-sphère pleine de rayon R est donnée par $A = 3\pi R^2$, ainsi avec $R = 4$ cm, $A = 3 \times \pi \times 4^2 = 3 \times \pi \times 16 = 48\,\pi$ cm².

5. Réponse C. Le volume d'une demi-sphère pleine ou vide de rayon R est donné par

$$V = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2} = \frac{2}{3}\pi R^3, \text{ soit avec } R = 4 \text{ cm}, V = \frac{2}{3}\times\pi\times 4^3 = \frac{2}{3}\times\pi\times 64 = \frac{128}{3}\pi \text{ cm}^3.$$

Rappel : Le volume d'une sphère est donné par $V_{\text{sphère}} = \frac{4}{3}\pi R^3$ unités de volume et donc le volume d'une demi-sphère pleine ou vide est égal à la moitié du volume d'une sphère soit : $V_{\text{demi-sphère}} = \frac{2}{3}\pi R^3$ unités de volume.

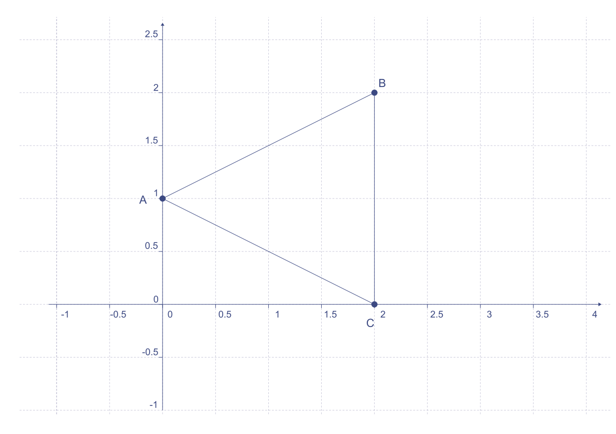
6. Réponse D. Vous devez calculer les longueurs AB, AC, et BC pour déterminer la nature du triangle ABC :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(2-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2$$

Vous en déduisez que le triangle ABC est isocèle en A.



7. **Réponse B.** L'équation $(x-2)^2 + y^2 = 4$ correspond à un cercle de centre (2 ; 0) et de rayon 2. En effet le cercle de centre (a ; b) et de rayon R a pour équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

Attention : À ne pas confondre avec l'équation d'une sphère de centre A (a, b, c) et de rayon R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

8. **Réponse A.** La distance d'un point M de coordonnées (x_M, y_M, z_M) à un plan d'équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par la formule :

$$\frac{|a \times x_M + b \times y_M + c \times z_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Ainsi avec les données de l'énoncé :

$$\frac{|1\times1+2\times2+3\times0+5|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{|1+4+0+5|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{|10|}{\sqrt{14}} = \frac{10\sqrt{14}}{14} = \frac{5}{7}\sqrt{14}$$

Remarque : En général, ne laissez pas de racine au dénominateur !

9. **Réponse B.** La distance d'un point M de coordonnées (x_M, y_M) à une droite

d'équation de la forme $ax + by + c = 0$ est donnée par la formule :

$$\frac{|a \times x_M + b \times y_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vous devez réécrire l'équation de la droite sous la forme $ax + by + c = 0$ pour appliquer la formule, soit $y = 2x + 4 \Leftrightarrow 2x - y + 4 = 0$

Ainsi avec les données de l'énoncé : $\dfrac{|2\times1-1\times2+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \dfrac{|2-2+4|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{|4|}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

Remarque : En général, ne laissez pas de racine au dénominateur !

10. **Réponse A.**

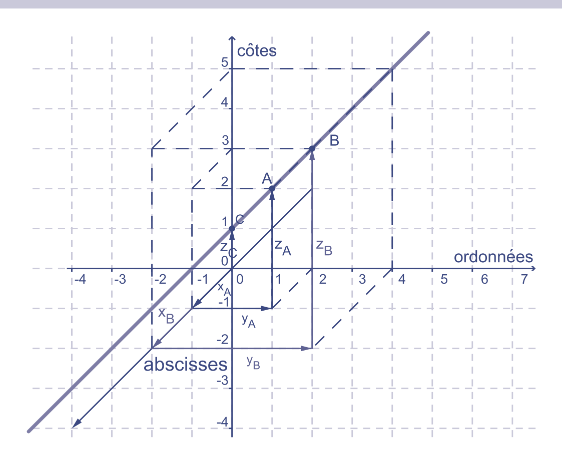
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 4-2 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vous remarquez que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$, donc ces vecteurs sont colinéaires. Ils ont en plus un point en commun (A), les points A, B et C sont donc alignés.

Remarque : Vous auriez pu considérer les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ avec pour point commun le point C ou bien encore les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ avec pour point commun le point B.

Remarque : Vous remarquez-aussi que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 3$, donc A est aussi le milieu de [BC].

Attention : En revanche, cela ne permet pas d'affirmer que le triangle ABC est isocèle car les trois points sont alignés. Il ne peut donc pas s'agir d'un triangle mais d'un triangle aplati.



11. Réponse B. L'ensemble des points M du plan vérifiant MA = MB est la médiatrice du segment [AB]. En effet MA = MB signifie que M est équidistant de A et de B. Il ne peut donc s'agir que de la médiatrice du segment [AB].

12. Réponse D. L'ensemble des points M vérifiant AM = *a* est le cercle de centre A et de rayon *a*.

13. Réponse A. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ doit vérifier que les droites (MA) et (MB) sont perpendiculaires. Ainsi seul le cercle de diamètre [AB] peut vérifier cette propriété parmi les propositions.

Remarque : Le produit scalaire de deux vecteurs est nul si et seulement si ces vecteurs ont des directions perpendiculaires.

14. Réponse C. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = 0$ doit vérifier que les droites (MA) et (AB) sont perpendiculaires. Ainsi seule la perpendiculaire à (AB) passant par A peut vérifier cette propriété parmi les propositions.

15. Réponse B.

$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = AB \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right\| = AB$ en appliquant la relation de Chasles. Ainsi après simplifications :

$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = AB \Leftrightarrow \left\|3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right\| = AB$$

Or $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ par propriété du centre de gravité d'un triangle ABC.
Ainsi :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AB \Leftrightarrow \left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=AB \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\frac{1}{3}AB \Leftrightarrow MG=\frac{1}{3}AB$$

Ainsi l'ensemble des points M vérifiant $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AB$ est le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{3}AB$.

Chapitre 2 LES ÉQUATIONS, LES INÉQUATIONS ET LES SYSTÈMES

Je fais le point sur mes connaissances

Les méthodes de résolution des équations, inéquations et systèmes vous sont très utiles pour les études de fonctions et en particulier pour déterminer l'ensemble de définition et les extrema éventuels.

✓ **Les équations**

Elles peuvent se présenter sous la forme d'un produit, d'un quotient, d'une fonction quelconque, etc. Vous devez parfaitement maîtriser leurs techniques de résolution.
Voici un tableau d'équivalence à connaître :

Équations	Solutions
$\frac{1}{x}=a, x\neq 0, a\neq 0$	$x=\frac{1}{a}, x\neq 0, a\neq 0$
$\ln(x)=a, x>0$	$x=\mathrm{e}^{a}$
$\mathrm{e}^{x}=a, a>0$	$x=\ln(a), a>0$
$\sqrt{x}=a,\ x\geq 0$	$x=a^{2}$
$x^{2}=a, a\geq 0$	$x=\pm\sqrt{a}, a\geq 0$
$x^{3}=a$	$x=\sqrt[3]{a}$
$x^{2p}=a, a\geq 0$	$x=\pm\sqrt[2p]{a}, a\geq 0$
$x^{2p+1}=a$	$x=\sqrt[2p+1]{a}$
$\lvert x\rvert=a$	$x=a$ ou $x=-a$

À retenir : La ou les solution(s) de l'équation $f(x) = 0$ est (sont) le(s) point(s) d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.

✓ **Les inéquations**

Les inéquations se présentent sous plusieurs formes que vous devez savoir résoudre. Prêtez notamment attention à la valeur absolue et à la notion de distance.

Voici un tableau des équivalences :

	$a < b$	$a \leq b$	$a > b$	$a \geq b$
ln(x)	$\ln(a) < \ln(b)$	$\ln(a) \leq \ln(b)$	$\ln(a) > \ln(b)$	$\ln(a) \geq \ln(b)$
e^x	$e^a < e^b$	$e^a \leq e^b$	$e^a > e^b$	$e^a \geq e^b$
$\sqrt{x}$	$\sqrt{a} < \sqrt{b}$	$\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$	$\sqrt{a} > \sqrt{b}$	$\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$
x^2 **sur** $[0, +\infty[$	$a^2 < b^2$	$a^2 \leq b^2$	$a^2 > b^2$	$a^2 \geq b^2$
x^2 **sur** $]-\infty; 0]$	$a^2 > b^2$	$a^2 \geq b^2$	$a^2 < b^2$	$a^2 \leq b^2$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	$\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$	$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	$\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$
x^3	$a^3 < b^3$	$a^3 \leq b^3$	$a^3 > b^3$	$a^3 \geq b^3$
$-x$	$-a > -b$	$-a \geq -b$	$-a < -b$	$-a \leq -b$

Et plus généralement :

	$a < b$	$a \leq b$	$a > b$	$a \geq b$
f **strictement croissante**	$f(a) < f(b)$	$f(a) \leq f(b)$	$f(a) > f(b)$	$f(a) \geq f(b)$
f **strictement décroissante**	$f(a) > f(b)$	$f(a) \geq f(b)$	$f(a) < f(b)$	$f(a) \leq f(b)$

Et les valeurs absolues ?

$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ où $a > 0$

$|x| > a \Leftrightarrow x > a$ ou $x < -a$ où $a > 0$

$|x - b| < a \Leftrightarrow -a < x - b < a \Leftrightarrow -a + b < x < a + b$ où $a > 0$

$|x - b| > a \Leftrightarrow x - b > a$ ou $x - b < -a \Leftrightarrow x > a + b$ ou $x < -a + b$ où $a > 0$

✓ Les racines et le signe des polynômes du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ en fonction de la valeur du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

	Racines	Signe	Factorisation
$\Delta > 0$ Deux racines réelles	$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	Le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines et de $-a$ à l'intérieur	$a(x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = 0$ Une racine double réelle	$x_0 = \frac{-b}{2a}$	Le polynôme est du signe de a	$a(x - x_0)^2$
$\Delta < 0$ Deux racines complexes conjuguées	$x_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$	Le polynôme est du signe de a	Pas de factorisation dans $\mathbb{R}$

✓ **Les systèmes d'équations et d'inéquations**

La résolution des systèmes de deux équations (affines) à deux inconnues

Vous devez maîtriser la méthode par combinaison et la méthode par substitution. Préférez la méthode par combinaison dans le cas où les coefficients multiplicateurs des variables sont proportionnels ou identiques (vous avez de la chance !). Optez pour la méthode par substitution dans le cas où une variable est affectée du coefficient 1.

La résolution des systèmes de deux inéquations (affines) à deux inconnues

En général la résolution se fait graphiquement. Vous mettez en valeur la partie solution sur le graphique (par exemple vous hachurez la partie solution).

Et en présence d'un système d'équations ou d'inéquations non affines ?

Vous appliquez les méthodes classiques de résolution par combinaison ou par substitution en prêtant attention aux propriétés des différentes expressions.



Je sais maîtriser

✓ La résolution des équations sous toutes leurs formes : affine, second degré, troisième degré (polynôme de degré trois à factoriser en produit d'un polynôme de degré un par un polynôme de degré deux)

✓ La méthode d'identification (factorisation d'un polynôme de degré 3).

✓ Remplir un tableau de signes (avec les valeurs qui annulent l'expression et les valeurs interdites) et en déduire les solutions d'une inéquation.

✓ Les inéquations avec des valeurs absolues

✓ La résolution des systèmes

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1 — Équations sous forme de polynômes de degrés 1 et 2

1. Quelle est l'affirmation exacte concernant l'équation : $x - x = 5$?

❒ **A.** Elle admet une unique solution

❒ **B.** $S = \varnothing$

❒ **C.** $S = \mathbb{R}^*$

❒ **D.** Elle admet pour solution $x = \frac{5}{2}$

❒ **E.** $S = \mathbb{R}$

2. Quelle est l'affirmation exacte concernant l'équation : $2x = 2x$?

❒ **A.** Elle admet une unique solution

❒ **B.** $S = \varnothing$

❒ **C.** $S = \mathbb{R}^*$

❒ **D.** Elle admet pour seule solution $x = 2$

❒ **E.** $S = \mathbb{R}$

3. Choisissez la bonne réponse concernant l'équation $x = 0$:

❒ **A.** Elle admet une infinité de solutions

❒ **B.** Elle n'admet aucune solution

❒ **C.** L'axe des abscisses est l'ensemble des solutions

❒ **D.** Elle admet une unique solution

❒ **E.** $S = \mathbb{R}^*$

4. Choisissez la bonne réponse concernant l'équation $3x - 2 = x^2$:

❒ **A.** L'équation admet exactement deux racines réelles strictement positives

❒ **B.** L'équation admet exactement une racine réelle

❒ **C.** La racine la plus petite est -1

❒ **D.** L'équation admet exactement une racine réelle positive et une racine réelle négative

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

5. Choisissez la bonne réponse concernant l'équation $x^2 = -1$:

❒ **A.** L'équation admet exactement une racine réelle

❒ **B.** L'équation admet exactement deux racines complexes

❒ **C.** L'équation n'admet pas de solution et cela dans aucun ensemble

❒ **D.** Les solutions sont $x = -1$ et $x = 1$

❒ **E.** $S = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$

Exercice 2 Équation sous la forme d'un produit de facteurs

6. Soit l'équation $2x - 1 + (1 - 2x)(3 + 2x) + 4x^2 - 1 = 0$, quelle est la bonne réponse ?

❒ **A.** L'équation n'admet pas de racine réelle

❒ **B.** L'équation admet pour unique solution $x = 2$

❒ **C.** L'équation admet pour unique solution $x = \frac{1}{2}$

❒ **D.** L'équation n'admet pas de solution

❒ **E.** L'équation admet une solution complexe

Exercice 3 Équation sous forme d'un quotient

7. Choisissez la bonne réponse concernant l'équation : $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{2x}{x(x-2)}$

❒ **A.** L'équation admet deux racines : $x = 0$ et $x = 2$

❒ **B.** x doit être différent de 0 uniquement

❒ **C.** L'équation admet pour solution $x = 2$

❒ **D.** L'équation admet une unique solution $x = 0$

❒ **E.** L'équation n'admet pas de solution

Exercice 4 Équations sous forme d'un polynôme de degré 3

8. Cochez l'affirmation ou les affirmations exacte(s) :

❒ **A.** $x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0$ admet exactement trois solutions réelles

❒ **B.** $x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0$ admet exactement deux solutions réelles

❒ **C.** $x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0$ admet exactement une solution réelle

❒ **D.** $x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0$ n'admet aucune solution

❒ **E.** 1 est racine évidente

9. Quelle est (ou sont) l'affirmation exacte au sujet du polynôme $x^3 + x^2 + x + 1$?

❒ **A.** 1 est racine évidente

❒ **B.** Il n'admet pas de factorisation

❒ **C.** Il se factorise sous la forme $(x + 1)(x^2 + 1)$

❒ **D.** Il admet exactement trois racines réelles

❒ **E.** (–1) est racine évidente

10. Quelle est (ou sont) l'affirmation exacte au sujet du polynôme $x^3 + 12x^2 + 45x + 50$?

❒ **A.** 2 est racine évidente

❒ **B.** Il n'admet pas de factorisation

❒ **C.** Il se factorise sous la forme $(x - 2)(x^2 + 10x + 25)$

❒ **D.** Il admet exactement deux racines réelles

❒ **E.** (–2) est racine évidente

Exercice 5 Équations avec changement d'inconnue

Pour chaque item, sélectionnez la bonne réponse.

11. L'équation $\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = 0$

❒ **A.** Admet exactement trois solutions réelles

❒ **B.** Admet exactement deux solutions réelles

❒ **C.** Admet exactement une solution réelle

❒ **D.** N'admet aucune solution

❒ **E.** Il est impossible de répondre à la question

12. L'équation $e^{2x} + 2e^x + 1 = 0$

❒ **A.** Admet exactement trois solutions réelles

❒ **B.** Admet exactement deux solutions réelles

❒ **C.** Admet exactement une solution réelle

❒ **D.** N'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$

❒ **E.** Il est impossible de répondre à la question

13. L'équation $2x + 3\sqrt{x} - 5 = 0$

❒ **A.** Admet exactement trois solutions réelles

❒ **B.** Admet exactement deux solutions réelles

❒ **C.** Admet exactement une solution réelle

❒ **D.** N'admet aucune solution

❒ **E.** Il est impossible de répondre à la question

14. L'équation $x^4 + x^2 + 2 = 0$

❒ **A.** Admet exactement trois solutions réelles

❒ **B.** Admet exactement deux solutions réelles

❒ **C.** Admet exactement une solution réelle

❒ **D.** N'admet aucune solution réelle

❒ **E.** Il est impossible de répondre à la question

15. L'équation $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$

❒ **A.** Admet exactement trois solutions réelles

❒ **B.** Admet exactement deux solutions réelles

❒ **C.** Admet exactement une solution réelle

❒ **D.** N'admet aucune solution

❒ **E.** Il est impossible de répondre à la question

Exercice 6 Inéquations

Pour chaque item, sélectionnez la bonne réponse.

16. $2x-4>0$ si et seulement si :

❒ **A.** $x=2$

❒ **B.** $x<2$

❒ **C.** $x>2$

❒ **D.** x est un réel non nul

❒ **E.** $x>0$

17. Le polynôme x^2+x+1 est :

❒ **A.** >0 pour tout x de $\mathbb{R}$

❒ **B.** négatif pour tout x de $\mathbb{R}$

❒ **C.** positif lorsque $x<2$ seulement

❒ **D.** négatif quand $x=0$

❒ **E.** <0 pour tout x de $\mathbb{R}$

18. L'inéquation $\frac{x+3}{x-1}-\frac{2x+3}{x+1}>0$

❒ **A.** Admet pour ensemble solution l'intervalle $\left]\frac{3-\sqrt{33}}{2};\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right[$

❒ **B.** Admet pour ensemble solution l'intervalle $\left[\frac{3-\sqrt{33}}{2};\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right[$

❒ **C.** Admet pour ensemble solution l'ensemble
$\left]-\infty;\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right[\cup\left]\frac{3+\sqrt{33}}{2};+\infty\right[$

❒ **D.** Admet pour ensemble solution l'ensemble
$\left]\frac{3-\sqrt{33}}{2};-1\right[\cup\left]1;\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right[$

❒ **E.** N'admet pas de solution

19. L'inéquation $\ln(x^2) + \ln(x) > 3$

❒ **A.** Admet pour ensemble solution $]e\,;+\infty[$

❒ **B.** Admet pour ensemble solution $[e\,;+\infty[$

❒ **C.** Admet pour ensemble solution $]1\,;+\infty[$

❒ **D.** Admet pour ensemble solution $]-\infty\,;1[$

❒ **E.** Admet pour ensemble solution $]0\,;+\infty[$

20. L'inéquation $e^x \geq 2$

❒ **A.** Admet pour ensemble solution $]e^2\,;+\infty[$

❒ **B.** Admet pour ensemble solution $[e^2\,;+\infty[$

❒ **C.** Admet pour ensemble solution $]\ln(2)\,;+\infty[$

❒ **D.** Admet pour ensemble solution $[\ln(2)\,;+\infty[$

❒ **E.** Admet pour ensemble solution $\mathbb{R}$

Exercice 7 Systèmes linéaires de deux équations

Pour chaque item, sélectionnez la bonne réponse.

21. Le système $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$

❒ **A.** Admet une infinité de solutions

❒ **B.** N'admet pas de solution

❒ **C.** Admet pour unique solution le couple (0 ; 0)

❒ **D.** Admet pour unique solution le couple (1 ; 2)

❒ **E.** Admet pour unique solution le couple (2 ; 1)

22. Le système $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+y=2 \end{cases}$

❒ **A.** Admet une infinité de solutions

❒ **B.** Admet pour unique solution le couple (1 ; 1)

❒ **C.** N'admet pas de solution

❒ **D.** Admet pour unique solution le couple (0 ; 2)

❒ **E.** Admet pour unique solution le couple (2 ; 0)

23. Le système $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=2 \end{cases}$

❒ **A.** Admet une infinité de solutions

❒ **B.** Admet pour unique solution le couple (1 ; 1)

❒ **C.** N'admet pas de solution

❒ **D.** Admet pour unique solution le couple (0 ; 2)

❒ **E.** Admet pour unique solution le couple (2 ; 0)

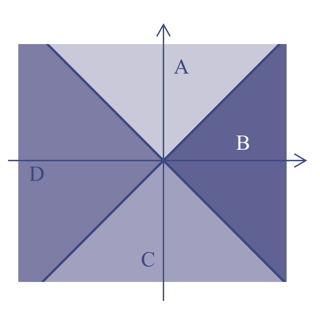
Exercice 8 Systèmes d'inéquations linéaires

Pour chaque item, sélectionnez la bonne réponse.

24. Le système $\begin{cases} x + y > 0 \\ x + y < 0 \end{cases}$

- ❒ **A.** Admet pour ensemble solution $[1 ; +\infty[$
- ❒ **B.** N'admet pas de solution
- ❒ **C.** Admet pour ensemble solution $]0 ; 1[$
- ❒ **D.** Admet pour ensemble solution $]0 ; +\infty[$
- ❒ **E.** Admet pour ensemble solution $\mathbb{R}$

25. Le système $\begin{cases} x + y > 0 \\ x - y < 0 \end{cases}$



- ❒ **A.** Admet pour ensemble solution l'ensemble A de la figure
- ❒ **B.** Admet pour ensemble solution l'ensemble B de la figure
- ❒ **C.** Admet pour ensemble solution l'ensemble C de la figure
- ❒ **D.** Admet pour ensemble solution l'ensemble D de la figure
- ❒ **E.** N'admet pas de solution

Exercice 9 Système d'équations non linéaires

Pour chaque item, sélectionnez la bonne réponse.

26. Le système $\begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$

- ❒ **A.** Admet pour ensemble solution $\mathbb{R}$
- ❒ **B.** Admet pour solution $x = y = e^{\frac{3}{2}}$
- ❒ **C.** Admet pour solution $x = e^{\frac{3}{2}} ; y = e^{-\frac{3}{2}}$
- ❒ **D.** Admet pour ensemble solution la droite d'équation $y = x$
- ❒ **E.** N'admet pas de solution

Exercice 10 Systèmes d'inéquations non linéaires

Pour chaque item, sélectionnez la bonne réponse.

27. Le système $\begin{cases} \ln(x^2) > 0 \\ e^x < 0 \end{cases}$

- ❒ **A.** Admet pour ensemble solution $[1 ; +\infty[$
- ❒ **B.** N'admet pas de solution
- ❒ **C.** Admet pour ensemble solution $]0 ; 1[$
- ❒ **D.** Admet pour ensemble solution $]0 ; +\infty[$
- ❒ **E.** Admet pour ensemble solution le point $\{(0 ; 0)\}$

28. Le système $\begin{cases} \ln(x^2) > 0 \\ e^x > 0 \end{cases}$

- ❒ **A.** Admet pour ensemble solution $\mathbb{R}$
- ❒ **B.** Admet pour ensemble solution $]1 ; +\infty[$
- ❒ **C.** Admet pour ensemble solution $]0 ; 1[$
- ❒ **D.** N'admet pas de solution
- ❒ **E.** Admet pour solution le nombre 0

CORRIGÉS

1. Réponse B. L'équation $x - x = 5$ équivaut à $0 = 5$, ce qui est impossible. Donc l'équation n'admet pas de solution car elle est impossible. Cela s'écrit également $S = \varnothing$ où $\varnothing$ est l'ensemble vide.

2. Réponse E. L'équation $2x = 2x$ admet une infinité de solutions car elle est toujours vraie. En effet : en regroupant les termes « $2x$ » du même côté, vous obtenez $2x - 2x = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, ce qui est toujours vrai. Cela s'écrit également $S = \mathbb{R}$.

3. Réponse D. L'équation $x = 0$ admet une unique solution $x = 0$. $S = \{0\}$.

4. Réponse A. Tout d'abord, vous écrivez l'équation en plaçant tous les termes du même côté. Vous obtenez l'équation du second degré de la forme $x^2 - 3x + 2 = 0$. Vous calculez ensuite le discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$. Donc l'équation admet exactement deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{1}}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{3+\sqrt{1}}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } S = \{1\ ;\ 2\}$$

5. Réponse B. Tout d'abord, vous écrivez l'équation en plaçant tous les termes du même côté. Vous obtenez l'équation du second degré de la forme $x^2 + 1 = 0$. Vous calculez ensuite le discriminant $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0$. Donc l'équation admet exactement deux racines complexes :

$$x_1 = \frac{0-\mathrm{i}\sqrt{4}}{2} = \frac{0-2\mathrm{i}}{2} = \frac{-2\mathrm{i}}{2} = -\mathrm{i} \text{ et } x_2 = \frac{0+\mathrm{i}\sqrt{4}}{2} = \frac{0+2\mathrm{i}}{2} = \frac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}$$

Remarque : Ces deux solutions sont des imaginaires purs car elles n'ont pas de partie réelle. Ceci est détaillé dans le chapitre sur les nombres complexes.

6. Réponse C. L'expression $2x - 1 + (1 - 2x)(3 + 2x) + 4x^2 - 1$ a visiblement un facteur commun : $2x - 1$.

Vous pouvez le faire apparaître en remarquant que $1 - 2x = -(2x - 1)$ et que $4x^2 - 1$ est de la forme $a^2 - b^2$, soit $4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)$:

$2x - 1 + (1 - 2x)(3 + 2x) + 4x^2 - 1 = 2x - 1 - (2x - 1)(3 + 2x) + (2x - 1)(2x + 1)$

$2x - 1 + (1 - 2x)(3 + 2x) + 4x^2 - 1 = (2x - 1)[1 - (3 + 2x) + (2x + 1)]$

$2x - 1 + (1 - 2x)(3 + 2x) + 4x^2 - 1 = (2x - 1)[1 - 3 - 2x + 2x + 1]$

$2x - 1 + (1 - 2x)(3 + 2x) + 4x^2 - 1 = (2x - 1)(-1) = 1 - 2x$

Finalement l'équation est équivalente à : $1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ et $S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Remarque : En développant l'expression puis en la réduisant, vous obtenez également le résultat $1 - 2x = 0$.

7. Réponse E. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}=\frac{2x}{x(x-2)} \Leftrightarrow \frac{x-2}{x(x-2)}+\frac{x}{x(x-2)}=\frac{2x}{x(x-2)}$ après réduction au même dénominateur, soit en en regroupant les termes en « x » et les termes constants cela donne :

$$\Leftrightarrow \frac{2x-2}{x(x-2)}=\frac{2x}{x(x-2)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=2x \\ x(x-2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2=0 \\ x\neq 0 \\ x\neq 2 \end{cases}$$

Or – 2 = 0 est impossible, ainsi $S=\varnothing$. Et l'équation n'admet pas de solution.

8. Réponses A et E. $x^3-4x^2+x+2=0$

Vous devez d'abord factoriser le polynôme. Pour cela vous déterminez la racine évidente en « tâtonnant » avec quelques valeurs (en général, vous testez − 3, − 2, − 1, 0, 1, 2, 3, etc.). Dans l'équation ci-dessus, vous obtenez facilement $x=1$ comme racine évidente, en effet : $1^3-4\times 1^2+1+2=1-4+1+2=0$

Ainsi le polynôme se factorise de la manière suivante où a, b et c sont à déterminer :

$x^3-4x^2+3x-2=(x-1)(ax^2+bx+c)$

$x^3-4x^2+3x-2=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c$

$x^3-4x^2+3x-2=ax^3+(b-a)\,x^2+(c-b)x-c$

Puis vous procédez par identification et vous obtenez un système de quatre équations à trois inconnues :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b-a=-4 \\ c-b=1 \\ -c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=-2 \end{cases}$$ et finalement :

$x^3-4x^2+x-2=(x-1)(x^2-3x-2)$

Vous pouvez maintenant résoudre cette équation en calculant le discriminant du second facteur : $\Delta=(-3)^2-4\times 1\times(-2)=9+8=17>0$. Donc le polynôme de degré 2 admet deux racines réelles distinctes :

$x_1=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ et finalement l'équation admet exactement trois solutions réelles : $S=\left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2};1;\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$

9. Réponses C et E. x^3+x^2+x+1

Vous devez d'abord factoriser le polynôme. Pour cela vous déterminez la racine évidente en « tâtonnant » avec quelques valeurs (en général, vous testez − 3, − 2, − 1, 0, 1, 2, 3, etc.). Dans l'équation ci-dessus, vous obtenez facilement $x=-1$ comme racine évidente, en effet : $(-1)^3+1^2-1+1=-1+1-1+1=0$

Ainsi le polynôme se factorise de la manière suivante où a, b et c sont à déterminer :

$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$

$x^3 + x^2 + x + 1 = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c$

$x^3 + x^2 + x + 1 = ax^3 + (b + a)\, x^2 + (c + b)x + c$

Puis vous procédez par identification et vous obtenez un système de quatre équations à trois inconnues :

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b+a=1 \\ c+b=1 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$ finalement le polynôme admet une factorisation de la forme : $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$ et donc **C** et **E** sont les bonnes réponses.

Astuce : Vous pouvez aussi directement développer $(x + 1)(x^2 + 1)$ et obtenir ainsi que la proposition C est vraie.

Vous pouvez maintenant déterminer les racines du polynôme en calculant le discriminant du second facteur : $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0$. Donc le polynôme de degré 2 n'admet pas de racine réelle mais deux racines complexes conjuguées : $x_1 = \dfrac{0 - i\sqrt{4}}{2} = \dfrac{-2i}{2} = -i$ et $x_2 = \dfrac{0 + i\sqrt{4}}{2} = \dfrac{2i}{2} = i$ et finalement le polynôme admet exactement trois solutions dans l'ensemble des complexes : $S = \{-1; -i; i\}$. Il admet une racine réelle et deux racines complexes conjuguées (qui sont ici des imaginaires purs).

Remarque : L'ensemble des réels est inclus dans l'ensemble des nombres complexes ! Ainsi un nombre réel est aussi un nombre complexe de la forme $a + ib$ où b est nul.

10. Réponses D et E. $x^3 + 12x^2 + 45x + 50$

Vous devez d'abord factoriser le polynôme. Pour cela vous déterminez la racine évidente en « tâtonnant » avec quelques valeurs (en général, vous testez − 3, − 2, − 1, 0, 1, 2, 3, etc.). Dans l'équation ci-dessus, vous obtenez facilement $x = -2$ comme racine évidente, en effet :

$(-2)^3 + 12 \times (-2)^2 + 45 \times (-2) + 50 = -8 + 48 - 90 + 50 = 0.$

Ainsi le polynôme se factorise de la manière suivante où a, b et c sont à déterminer :

$x^3 + 12x^2 + 45x + 50 = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$

$x^3 + 12x^2 + 45x + 50 = ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c$

$x^3 + 12x^2 + 45x + 50 = ax^3 + (b + 2a)\, x^2 + (c + 2b)x + 2c$

Puis vous procédez par identification et vous obtenez un système de quatre équations à trois inconnues :

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b+2a=12 \\ c+2b=45 \\ 2c=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=10 \\ c=25 \end{cases}$ finalement le polynôme admet une factorisation de la forme : $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 2)(x^2 + 10x + 25)$

Vous pouvez maintenant déterminer les racines du polynôme en calculant le discriminant du second facteur : $\Delta = 10^2 - 4 \times 1 \times 25 = 0$. Donc le polynôme de degré 2 admet une racine réelle double : $x_0 = \frac{-10}{2} = -5$ et finalement le polynôme admet exactement deux solutions dans l'ensemble des réels : $S = \{-5;-2\}$.

11. Réponse B.

$\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = 0$, vous posez $X = \ln(x)$ et obtenez une équation en X :

$X^2 - 3X + 2 = 0$, vous calculez ainsi le discriminant Δ :

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$

Donc le polynôme $X^2 - 3X + 2$ admet deux racines réelles distinctes :

$X_1 = \frac{3-\sqrt{1}}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ et $X_2 = \frac{3+\sqrt{1}}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Or $X = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^X$ et finalement l'équation $\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = e^1 = e$ et $x_2 = e^2$ et $S = \{e ; e^2\}$.

12. Réponse D.

$e^{2x} + 2e^x + 1 = 0$, vous posez $X = e^x$ et obtenez une équation en X :

$X^2 + 2X + 1 = 0$, vous calculez ainsi le discriminant Δ :

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$

Donc le polynôme $X^2 + 2X + 1$ admet une racine réelle double : $X_0 = \frac{-2}{2} = -1$

Or $X = e^x \Leftrightarrow x = \ln(X)$ et finalement l'équation $e^{2x} + 2e^x + 1 = 0$ n'admet pas de solution réelle car $X_0 = -1 < 0$ et vous ne pouvez pas calculer le logarithme népérien d'un nombre négatif. Ainsi $S = \varnothing$.

13. Réponse C.

$2x + 3\sqrt{x} - 5 = 0$, vous posez $X = \sqrt{x}$ et obtenez une équation en X :

$2X^2 + 3X - 5 = 0$, vous calculez ainsi le discriminant Δ :

$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 9 + 40 = 49 > 0$

Donc le polynôme $2X^2 + 3X - 5$ admet deux racines réelles distinctes :

$X_1 = \frac{-3-\sqrt{49}}{2\times2} = \frac{-3-7}{4} = \frac{-10}{4} = \frac{-5}{2} < 0$ donc ne convient pas car on a posé $X = \sqrt{x}$ donc X est obligatoirement positif ou nul par définition de la racine carrée.

$X_2 = \frac{-3+\sqrt{49}}{2\times2} = \frac{-3+7}{4} = \frac{4}{4} = 1$ convient car X_2 est positive ou nulle.

Or $X = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = X^2$ et finalement l'équation $2x + 3\sqrt{x} - 5 = 0$ admet une unique solution réelle $x_2 = 1^2 = 1$ et donc $S = \{1\}$.

14. Réponse D.

$x^4 + x^2 + 2 = 0$, vous posez $X = x^2$ et obtenez une équation en X :

$X^2 + X + 2 = 0$, vous calculez ainsi le discriminant Δ :

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$

Donc le polynôme $X^2 + X + 2$ n'admet pas de racine réelle mais deux racines complexes conjuguées. Donc l'équation $x^4 + x^2 + 2 = 0$ n'admet pas de racine réelle car $X = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{X}$.

Remarque : Vous obtenez les solutions x_1 et x_2 à partir des racines carrées des solutions complexes X_1 et X_2. Le calcul de la racine carrée d'un nombre complexe n'est pas au programme de terminale.

$$X_1 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2} \text{ et } X_2 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{\frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}} \text{ et } x_2 = \pm\sqrt{\frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}}$$

15. Réponse B.

$\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 10 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3\times\frac{1}{x} - 10 = 0$, vous posez $X = \frac{1}{x}$ et obtenez ainsi une équation en X :

$X^2 + 3X - 10 = 0$, vous calculez ainsi le discriminant Δ :

$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 9 + 40 = 49 > 0$

Donc le polynôme $X^2 + 3X - 10$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 - 7}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \text{ et } X_2 = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 + 7}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Or $X = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{X}$ et finalement l'équation $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 10 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = -\frac{1}{5}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$ et donc $S = \left\{-\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right\}$

16. Réponse C. $2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{4}{2} \Leftrightarrow x > 2$ et $S =]2 ; +\infty[$

17. Réponse A. Il vous suffit de calculer le discriminant de :

$x^2 + x + 1$: $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$. $\Delta < 0$ donc le polynôme est du signe de $a = 1 > 0$. Ainsi pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$.

18. Réponse D.

$\frac{x+3}{x-1} - \frac{2x+3}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x+1)}{x^2-1} - \frac{(2x+3)(x-1)}{x^2-1} > 0$ en réduisant au même dénominateur. Après simplifications :

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+4x+3)}{x^2-1} - \frac{(2x^2+x-3)}{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4x+3-2x^2-x+3}{x^2-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+3x+6}{(x-1)(x+1)} > 0$$

Vous effectuez un tableau de signes afin de déterminer le signe global du quotient :

Pour le numérateur vous calculez le discriminant :

$\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 9 + 24 = 33 > 0$ donc le polynôme est du signe de $a = -1 < 0$ à l'extérieur des racines et du signe de $-a = 1 > 0$ à l'intérieur des racines.

Il admet deux racines réelles : $x_1 = \frac{-3+\sqrt{33}}{2\times(-1)} = \frac{3-\sqrt{33}}{2}$ et $x_2 = \frac{-3-\sqrt{33}}{2\times(-1)} = \frac{3+\sqrt{33}}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{3-\sqrt{33}}{2}$	-1	1	$\frac{3+\sqrt{33}}{2}$	$+\infty$
$-x^2+3x+6$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x-1$	$-$		$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
Quotient	$-$	0	$+$	$-$	$+$	0	$-$

Et le quotient est positif strictement pour $x \in \left]\frac{3-\sqrt{33}}{2};-1\right[\cup \left]1;\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right[$

Et $S = \left]\frac{3-\sqrt{33}}{2};-1\right[\cup \left]1;\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right[$.

19. Réponse A.

$\ln(x^2) + \ln(x) > 3 \Leftrightarrow 2\ln(x) + \ln(x) > 3 \Leftrightarrow 3\ln(x) > 3 \Leftrightarrow \ln(x) > 1 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}$ par passage à l'exponentielle (qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, c'est pourquoi, vous ne changez pas le sens de l'inégalité).

Ainsi $S =]\mathrm{e}\ ;+\infty[$.

20. Réponse D. $\mathrm{e}^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln(2)$ par passage au logarithme népérien (qui est une fonction strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$, c'est pourquoi, vous ne changez pas le sens de l'inégalité).

Ainsi $S = [\ln(2)\ ;+\infty[$.

21. Réponse A. $\begin{cases} x+y=3 & (1) \\ 2x+2y=6 & (2) \end{cases}$

Vous remarquez que les deux équations sont proportionnelles, en effet : (2) = 2 × (1). Le système admet donc une infinité de solutions telles que $x + y = 3$. L'ensemble solution est la droite d'équation $x + y = 3$ ou encore $y = 3 - x$.

22. Réponse B. Pour résoudre ce système vous avez la possibilité d'utiliser la méthode par substitution ou la méthode par combinaison.

Méthode par substitution :

$\begin{cases} x+2y=3 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2(2-x)=3 \\ y=2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4-2x=3 \\ y=2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2x=3-4 \\ y=2-x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x=-1 \\ y=2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow S=\{(1\ ;\ 1)\}$

Méthode par combinaison :

$\begin{cases} x+2y=3\ (1) \\ x+y=2\ \ (2) \end{cases}$ en effectuant la différence (1) − (2), vous obtenez :

(1) − (2) ⇔ $(x + 2y) - (x + y) = 3 - 2 \Leftrightarrow x + 2y - x - y = 1 \Leftrightarrow y = 1$. Vous remplacez ensuite y par 1 dans l'une ou l'autre des équations et vous obtenez $x = 1$. Et finalement $S = \{(1\ ;\ 1)\}$.

23. Réponse C. $\begin{cases} x+y=3\ (1) \\ x+y=2\,(2) \end{cases}$ en effectuant la différence des deux équations, vous obtenez :

$(x + y) - (x + y) = 3 - 2 \Leftrightarrow 0 = 1$, ce qui est impossible. Donc le système n'admet pas de solution et $S = \varnothing$.

24. Réponse B.

$\begin{cases} x+y>0 \\ x+y<0 \end{cases}$ n'admet pas de solution car les deux équations sont contradictoires.

En effet l'expression $x + y$ ne peut pas être à la fois positive strictement et négative strictement. $S = \varnothing$.

25. Réponse A. L'ensemble solution est l'ensemble A.

En effet en prenant par exemple le point (1 ; 2), vous remarquez qu'il vérifie les deux inéquations. Vous sélectionnez l'ensemble contenant ce point et délimité par les droites d'équations $x + y = 0$ et $x - y = 0$.

La méthode consiste tout d'abord à tracer les droites d'équations $x + y = 0$ et $x - y = 0$, puis à choisir au hasard un point dont les coordonnées vérifient à la fois les première et seconde conditions et enfin à sélectionner l'ensemble délimité par les deux droites et contenant le point que vous avez choisi.

Attention : Les portions de droites correspondantes à l'égalité ne sont pas comprises dans l'ensemble des solutions car les inégalités de l'inéquation sont strictes.

Dans le cas d'inégalités larges, vous devez inclure les portions de droites correspondant à l'égalité.

26. Réponse B.

$$\begin{cases}\ln(x)+\ln(y)=3\\ x-y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln(x)+\ln(x)=3\\ x=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\ln(x)=3\\ x=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln(x)=\dfrac{3}{2}\\ x=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=e^{\frac{3}{2}}\\ x=y\end{cases}$$

et donc $x=y=\ e^{\frac{3}{2}}$. $S=\left\{\left(e^{\frac{3}{2}},e^{\frac{3}{2}}\right)\right\}$

27. Réponse B.

$\begin{cases}\ln(x^2)>0\\ e^x<0\end{cases}$ n'admet pas de solution car la seconde inéquation est impossible (une exponentielle n'est jamais négative). S = ∅.

28. Réponse B.

$$\begin{cases}\ln(x^2)>0\\ e^x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\ln(x)>0\\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>1\\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \Leftrightarrow x\in\ ]1\ ;+\infty[\text{ et } S=\ ]1\ ;+\infty[$$

La seconde inéquation est toujours vraie car une exponentielle est toujours > 0. Donc seule la première inéquation intervient pour l'ensemble des solutions.

Astuce : Pensez à linéariser le terme dans le ln : $\ln(x^2) = 2\ln(x)$, pour $x > 0$!

Chapitre 3 L'ENSEMBLE DE DÉFINITION D'UNE FONCTION

Je fais le point sur mes connaissances

✓ Les trois règles principales pour déterminer l'ensemble de définition :
- On ne peut pas diviser par 0
- On ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre strictement négatif
- On ne peut pas calculer le logarithme népérien d'un nombre négatif ou nul

✓ Je connais les ensembles de définition des fonctions usuelles.

Fonction $f(x)$	**D_f**	**Fonction $f(x)$**	**D_f**
$ax + b$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\ln(x)$	$]0 ; +\infty[$
Fonctions circulaires Sauf $x \mapsto \tan x$ $x \mapsto \text{cotan } x$	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} [\pi]$ $\mathbb{R} \setminus \{0\} [\pi]$	e^x	$\mathbb{R}$

Je sais définir

✓ Les fonctions avec des quotients

✓ Les fonctions avec des racines carrées

✓ Les fonctions avec des logarithmes népériens

Je sais maîtriser

✓ Les équations

✓ Les inéquations

✓ Les systèmes

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1

Déterminez l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x+3}$

❒ **A.** $D_f =]-3\,;+\infty[$ ❒ **C.** $D_f = \mathbb{R}$ ❒ **E.** $D_f = \mathbb{R}^*$

❒ **B.** $D_f = [-3\,;+\infty[$ ❒ **D.** $Df = [0\,;+\infty[$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$

❒ **A.** $D_f = \mathbb{R}$ ❒ **C.** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ❒ **E.** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

❒ **B.** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ❒ **D.** $D_f = \mathbb{R}^*$

3. $f(x) = \ln(2x)$

❒ **A.** $D_f =]0\,;+\infty[$ ❒ **C.** $D_f = [-2\,;+\infty[$ ❒ **E.** $D_f = \mathbb{R}^*$

❒ **B.** $D_f = [0\,;+\infty[$ ❒ **D.** $D_f = [2\,;+\infty[$

Exercice 2

Déterminez l'ensemble de définition des fonctions composées :

4. $f(x) = \ln|x|$

❒ **A.** $D_f =]0\,;+\infty[$ ❒ **C.** $D_f = \mathbb{R}$ ❒ **E.** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

❒ **B.** $D_f = [0\,;+\infty[$ ❒ **D.** $D_f = \mathbb{R}^*$

5. $f(x) = \ln(\sqrt{x})$

❒ **A.** $D_f =]0\,;+\infty[$ ❒ **C.** $D_f = \mathbb{R}$ ❒ **E.** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

❒ **B.** $D_f = [0\,;+\infty[$ ❒ **D.** $D_f = \mathbb{R}^*$

6. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

❒ **A.** $D_f =]0\,;+\infty[$ ❒ **C.** $D_f = \mathbb{R}$ ❒ **E.** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

❒ **B.** $D_f = [0\,;+\infty[$ ❒ **D.** $D_f = \mathbb{R}^*$

7. $f(x) = \dfrac{1}{e^{\sqrt{|x|}}}$

❒ **A.** $D_f =]0\,;+\infty[$ ❒ **C.** $D_f = \mathbb{R}$ ❒ **E.** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

❒ **B.** $D_f = [0\,;+\infty[$ ❒ **D.** $D_f = \mathbb{R}^*$

CORRIGÉS

1. Réponse B. Le terme sous la racine doit être positif ou nul. Ainsi f est définie pour tout x tel que $x + 3 \geq 0$, soit pour $x \geq -3$.
Ainsi $D_f = [-3 ; +\infty[$.

Attention : f n'est pas dérivable en $x = -3$. Elle est donc dérivable sur $]-3 ; +\infty[$.

2. Réponse A. L'expression au dénominateur doit être non nulle. Ainsi $x^2 + 2 \neq 0$ $\Leftrightarrow x^2 \neq -2$. Ce qui est toujours vrai car un carré est toujours positif ou nul donc forcément différent de -2.
Ainsi $D_f = \mathbb{R}$.

3. Réponse A. La quantité à l'intérieur d'un logarithme népérien est impérativement strictement positive. Cela implique que $2x > 0$, soit $x > 0$.
Ainsi $D_f =]0 ; +\infty[$.

4. Réponse D. Le terme à l'intérieur d'un logarithme népérien est impérativement strictement positif. Cela implique que $|x| > 0$, soit $x \neq 0$, car une valeur absolue est toujours positive ou nulle.
Ainsi $D_f = \mathbb{R}^*$.

5. Réponse A. Le terme à l'intérieur d'un logarithme népérien est impérativement strictement positif. La quantité à l'intérieur d'une racine carrée doit être positive ou nulle. Cela implique que $x > 0$ et $x \geq 0$, soit $x > 0$.
Ainsi $D_f =]0 ; +\infty[$.

6. Réponse B. La fonction racine carrée est définie pour $x \geq 0$ et la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.
Ainsi $D_f = [0 ; +\infty[$.

Attention : Mais f est dérivable sur $Df' =]0, +\infty[$.

7. Réponse C. Une valeur absolue étant toujours positive ou nulle, la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Une fonction quotient est définie lorsque son dénominateur est non nul soit ici lorsque $e^{\sqrt{|x|}} \neq 0$ ce qui est toujours vrai car une exponentielle est toujours strictement positive.
Ainsi $D_f = \mathbb{R}$.

Chapitre 4 L'AXE ET LE CENTRE DE SYMÉTRIE D'UNE FONCTION

Je fais le point sur mes connaissances

✓ **Fonction paire**

Pour tout $x \in D_f$, $f(x) = f(-x)$
La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

✓ **Fonction impaire**

Pour tout $x \in D_f$, $f(x) = -f(-x)$
La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

✓ **Fonction avec un axe de symétrie**

La droite $x = a$ est axe de symétrie de la courbe représentative d'une fonction f si et seulement si : $f(a + x) = f(a - x)$
Lorsque $a = 0$, la relation devient $f(x) = f(-x)$, ce qui équivaut à f paire.

✓ **Fonction avec un centre de symétrie**

Le point A de coordonnées $(a ; b)$ est centre de symétrie de la courbe représentative d'une fonction f si et seulement si : $f(a + x) + f(a - x) = 2b$.
Lorsque le point A est l'origine du repère $A(0 ; 0)$, la relation devient $f(x) + f(-x) = 0$, ce qui équivaut à $f(x) = -f(-x)$, ce qui équivaut aussi à f impaire.

Je sais définir

✓ La parité d'une fonction

✓ L'imparité d'une fonction

Je sais maîtriser

✓ Déterminer la présence d'un axe de symétrie d'une fonction

✓ Déterminer la présence d'un centre de symétrie d'une fonction

✓ Déterminer si une fonction est paire ou impaire ou ni l'un ni l'autre

ENTRAÎNEMENTS

Exercice — Parité et imparité d'une fonction

Cochez la bonne réponse :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

❒ **A.** f est paire
❒ **B.** f est impaire
❒ **C.** f n'est ni paire ni impaire
❒ **D.** Sa courbe représentative est symétrique par rapport à $x = -3$
❒ **E.** Aucune réponse ne convient

2. $f(x) = |x| + 2x$

❒ **A.** f est paire
❒ **B.** f est impaire
❒ **C.** f n'est ni paire ni impaire
❒ **D.** Sa courbe représentative est symétrique par rapport à $x = 0$
❒ **E.** Aucune réponse ne convient

3. $f(x) = x^3 + 4x$

❒ **A.** f est paire
❒ **B.** f est impaire
❒ **C.** f n'est ni paire ni impaire
❒ **D.** Sa courbe représentative est symétrique par rapport à $x = 0$
❒ **E.** Aucune réponse ne convient

4. $f(x) = (x - 1)(x + 1)$

❒ **A.** f est paire
❒ **B.** f est impaire
❒ **C.** f n'est ni paire ni impaire
❒ **D.** Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère O
❒ **E.** Aucune réponse ne convient

5. $f(x) = (x - 1)^2$

❒ **A.** f est paire
❒ **B.** f est impaire
❒ **C.** f n'est ni paire ni impaire
❒ **D.** Sa courbe représentative est symétrique par rapport à $x = 0$
❒ **E.** Aucune réponse ne convient

6. $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + 2$

❒ **A.** f est paire

❒ **B.** f est impaire

❒ **C.** f est à la fois paire et impaire

❒ **D.** Sa courbe représentative est symétrique par rapport au point A(1 ; 2)

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

CORRIGÉS

1. Réponse A.

$f(-x) = \sqrt{(-x)^2+3} = \sqrt{x^2+3} = f(x)$ et f est paire. Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $x = 0$.

2. Réponse C.

$f(-x) = |-x| + 2 \times (-x) = |x| - 2x \neq f(x)$ et $\neq -f(x)$. f n'est donc ni paire ni impaire. Sa courbe représentative n'est pas non plus symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $x = 0$ (car elle n'est pas paire).

3. Réponse B.

$f(-x) = (-x)^3 + 4 \times (-x) = -x^3 - 4x = -f(x)$. f est donc impaire et sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine O(0 ; 0) du repère.

4. Réponse A.

$f(-x) = (-x-1)(-x+1) = -(x+1)(-(x-1)) = (x+1)(x-1) = f(x)$. f est donc paire et sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

5. Réponse C.

$f(-x) = (-x-1)^2 = (x+1)^2 \neq f(x)$ et $\neq -f(x)$. f n'est donc ni paire ni impaire.

> **Remarque :** Elle admet néanmoins un axe de symétrie $x = 1$, en effet : $f(1+x) = (1+x-1)^2 = x^2$ et $f(1-x) = (1-x-1)^2 = (-x)^2 = x^2$, donc $f(1+x) = f(1-x)$

6. Réponse D.

$$f(-x) = \frac{1}{-x-1} + 2 = \frac{-1}{x+1} + 2 \neq f(x) \text{ et } \neq -f(x).$$ f n'est donc ni paire ni impaire.

Elle admet un centre de symétrie A de coordonnées (1 ; 2), en effet :

$$f(1+x)+f(1-x) = \frac{1}{1+x-1} + 2 + \frac{1}{1-x-1} + 2 = \frac{1}{x} + 2 + \frac{1}{-x} + 2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + 4 = 4 = 2\times 2$$

> **Rappel :** Le point A(a, b) est centre de symétrie de f si et seulement si : $f(a+x) + f(a-x) = 2 \times b$.

Chapitre 5

LES LIMITES

Je fais le point sur mes connaissances

✓ **Les formes indéterminées :** $+\infty - \infty$; $-\infty + \infty$; $0 \times \infty$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\dfrac{0}{0}$

✓ **Le terme de plus haut degré**

La limite d'un polynôme en + ou – ∞ est égale à la limite en + ou – ∞ de son terme de plus haut degré.

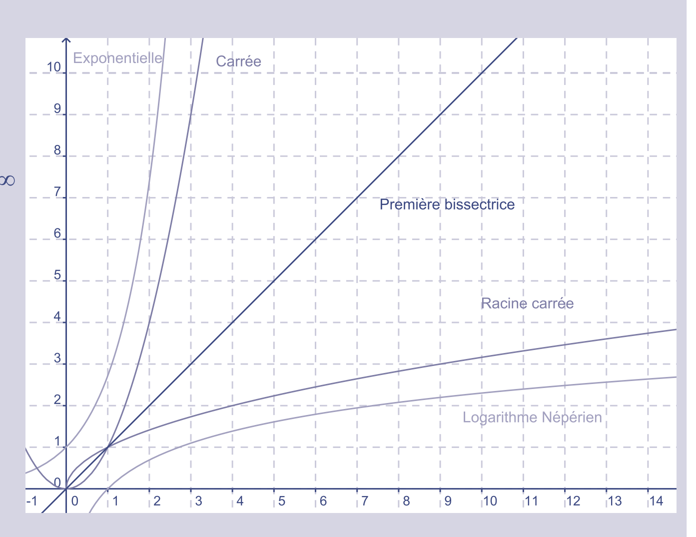
$$\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

✓ **Les croissances comparées**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = +\infty$$



✓ **La factorisation puis la simplification d'un quotient,**

$$\lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x-b)}{x-a} = \lim_{x\to a} x - b = a - b$$

par exemple :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} x - 2 = 1 - 2 = -1$$

✓ **La quantité conjuguée**, voici un exemple :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\left(\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}\right)\left(\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}\right)}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}} \right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{8}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}} \right) = 0$$

✓ **Le taux de variations**

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

Exemples : $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ où $f(x) = e^x$ et $f'(0) = 1$

$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ où $f(x) = \ln(x)$ et $f'(1) = 1$

✓ **Les limites à connaître**

$\lim_{x \to 0} x\ln(x) = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

✓ **Les asymptotes**

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \Rightarrow y = b$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f

$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0 \Rightarrow y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f

Je sais définir

✓ Une limite

✓ Les formes indéterminées

✓ Une quantité conjuguée

✓ Un taux de variations

✓ Une asymptote horizontale, une asymptote verticale et une asymptote oblique

Je sais maîtriser

✓ Repérer les termes de plus haut degré

✓ Factoriser une expression

✓ Calculer la quantité conjuguée d'une expression

✓ Repérer un taux de variations

✓ Déduire les asymptotes éventuelles de la courbe représentative d'une fonction f

ENTRAÎNEMENTS

Exercice Limites

Cochez la bonne réponse :

1. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2+1}$

❒ **A.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ ❒ **C.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{e}$ ❒ **E.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

❒ **B.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ❒ **D.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2. $f(x) = \sqrt{(-x)^2 + 3}$

❒ **A.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ❒ **C.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ❒ **E.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{3}$

❒ **B.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ❒ **D.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

3. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x} + 2}$

❒ **A.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ❒ **C.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{2}$ ❒ **E.** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \sqrt{2}$

❒ **B.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ ❒ **D.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

❒ **A.** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ ❒ **C.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ❒ **E.** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$

❒ **B.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ ❒ **D.** $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$

5. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$

❒ **A.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ❒ **C.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ ❒ **E.** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

❒ **B.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ❒ **D.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

6. $f(x) = \dfrac{\ln(x+1) - \ln(3)}{x-2}$

❒ **A.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ln(2)$

❒ **B.** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{1}{3}$

❒ **C.** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{1}{2}$

❒ **D.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

❒ **E.** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$

7. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

❒ **A.** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

❒ **B.** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

❒ **C.** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

❒ **D.** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \mathrm{e}$

❒ **E.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

8. $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$

❒ **A.** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

❒ **B.** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

❒ **C.** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

❒ **D.** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

❒ **E.** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ln(2)$

9. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$

❒ **A.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

❒ **B.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

❒ **C.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

❒ **D.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

❒ **E.** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

10. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}$

❒ **A.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

❒ **B.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

❒ **C.** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

❒ **D.** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

❒ **E.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{e}$

CORRIGÉS

1. Réponse B. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ par croissances comparées (la fonction $\ln(x)$ croît moins vite que la fonction x^2+1).

Vous déduisez que la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$.

2. Réponse A.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ en effet : } \lim_{x\to+\infty}(-x)^2=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\sqrt{(-x)^2+3}=+\infty$$

3. Réponse C.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+2=2 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x}+2}=\sqrt{2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt{2}$$

Vous déduisez que la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y=\sqrt{2}$ au voisinage de $+\infty$.

4. Réponse A. Vous devez calculer le discriminant du numérateur afin de le factoriser : $\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-2)=1+8=9$. $\Delta>0$, le polynôme situé au numérateur admet donc deux racines réelles distinctes : $x_1=\frac{1-3}{2}=-1$ et $x_2=\frac{1+3}{2}=2$ et se factorise sous la forme $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$, ainsi l'expression de $f(x)$ se simplifie et pour tout x réel différent de 2, vous déduisez sa limite :

$$\frac{x^2-x-2}{x-2}=\frac{(x+1)(x-2)}{x-2}=x+1 \Rightarrow \lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+1)=3 \Rightarrow \lim_{x\to2} f(x)=3$$

5. Réponse D.

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

Vous déduisez que la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$.

6. Réponse B. En exprimant le taux de variations de $h(x)=\ln(x+1)$ en $x=2$, avec $h'(x)=\frac{1}{x+1}$ vous déduisez que la limite du taux de variations $\frac{\ln(x+1)-\ln(3)}{x-2}$ de $h(x)$ en $x=2$ lorsque x tend vers 2 est égale au nombre dérivé de h en 2, soit $h'(2)=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$. Donc $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\frac{1}{3}$

La limite en $+\infty$ de $f(x)$ est égale à 0 par croissances comparées.

7. Réponse A. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = -\infty$

Cette limite est parfois difficile à déterminer, si vous avez un doute, vous pouvez toujours étudier les variations de f pour vérifier la cohérence de votre résultat. La limite est forcément négative étant donné que $\ln(x)$ est négatif lorsque $x \in\ ]0, 1[$.

Vous en déduisez que la courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

8. Réponse B. En exprimant le taux de variations de $h(x) = \ln(x + 1)$ en $x = 0$, avec $h'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ vous déduisez que la limite du taux de variations $\dfrac{\ln(x+1)-\ln(0+1)}{x-0}$ de $h(x)$ en $x = 0$ lorsque x tend vers 0 est égale au nombre dérivé de h en 0, soit $h'(0) = \dfrac{1}{0+1} = \dfrac{1}{1} = 1$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

9. Réponse A. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^2}\right) = 0$

Cette limite est parfois difficile à déterminer, si vous avez un doute, vous pouvez toujours étudier les variations de f pour vérifier la cohérence de votre résultat. La limite est forcément positive ou nulle étant donné que les termes au numérateur et dénominateur sont strictement positifs ($e^x > 0$ et $x^2 > 0$ pour $x \neq 0$).

Vous en déduisez que la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

10. Réponse D. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$, en effet :

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

Vous en déduisez que la courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Chapitre 6

LES DÉRIVÉES

Je fais le point sur mes connaissances

✓ **Tableau des dérivées**

Fonction	Dérivée
a constante réelle	0
x	1
x^2	$2x$
x^n, $n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}, $n \in \mathbb{N}$
$\sqrt{x}$, $x \geq 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$
$\frac{1}{x}$, $x \neq 0$	$-\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$
$\frac{1}{x^n}$, $x \neq 0$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$, $x \neq 0$
$\ln(x)$, $x > 0$	$\frac{1}{x}$, $x > 0$
e^x	e^x
$a^x = e^{x\ln(a)}$, $a > 0$	$\ln(a) \times a^x$, $a > 0$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$\text{cotan}(x)$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

✓ **Tableau des dérivées avec opération de fonctions**

Fonctions $u(x)$ et $v(x)$	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$

Fonctions $u(x)$ et $v(x)$	Dérivée
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
u^2	$2u'u$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\frac{1}{u^n}$	$\frac{-nu'}{u^{n+1}}$
$u o v$	$v' \times u' o v$

Je sais définir

✓ L'ensemble de définition et de dérivabilité d'une fonction

✓ La dérivée d'une fonction

✓ Le taux de variations d'une fonction en un point

✓ Le nombre dérivé d'une fonction en un point

✓ Le tableau de variations d'une fonction

Je sais maîtriser

✓ Calculer la dérivée d'une fonction

✓ Dresser le tableau de variations d'une fonction

ENTRAÎNEMENTS

Exercice Dérivées

Cochez ou les la bonne(s) réponse(s) :

1. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x + 1}$

❒ **A.** $f'(x) = \sqrt{4x^2 + 3}$

❒ **B.** $f'(x) = \dfrac{4x + 3}{2\sqrt{2x^2 + 3x + 1}}$

❒ **C.** f est dérivable en $x = -1$

❒ **D.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$

❒ **E.** $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x^2 + 3x + 1}}$

2. $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1}{x} + 2}\right)$

❒ **A.** f est définie et dérivable sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left]0; +\infty\right[$

❒ **B.** $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x} + 2}}$

❒ **C.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$

❒ **D.** $f'(x) = \dfrac{-1}{2x(2x + 1)}$

❒ **E.** $f'(x) = \dfrac{1}{2x(2x + 1)}$

3. $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{\ln(x)}$

❒ **A.** $f'(x) = \dfrac{(2x - 1)\ln(x) - x + 1}{\ln^2(x)}$

❒ **B.** $f'(x) = \dfrac{(2x - 1)\ln(x) - x - 1}{\ln^2(x)}$

❒ **C.** $f'(x) = \dfrac{\ln(x) - x + 1}{\ln(x)}$

❒ **D.** $f'(x) = \dfrac{(2x - 1)\ln(x)}{\ln^2(x)}$

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

4. On considère la fonction $h(x)$ donnée par $h(x) = (2x - 1)\ln(x) - x + 1$

❒ **A.** $h'(x) = 2\ln(x) - 1$

❒ **B.** $h'(x) = 2\ln(x) - \frac{1}{x}$

❒ **C.** h' est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$

❒ **D.** h est décroissante puis croissante

❒ **E.** $h'(x) = 2\ln(x) + 1 - \frac{1}{x}$

5. $f(x) = \frac{e^{x+1}}{x}$

❒ **A.** $f'(x) = \frac{(x+1)e^{x+1}}{x^2}$

❒ **B.** f est croissante sur $\mathbb{R}$

❒ **C.** $f'(x) = \frac{(x-1)e^{x+1}}{x^2}$

❒ **D.** f est monotone sur $\mathbb{R}$

❒ **E.** f est strictement croissante sur $]0 ; 1]$

6. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x} + \frac{1}{2}$

❒ **A.** $f'(x) = \frac{-1}{2x^2\sqrt{x^2+1}}$

❒ **B.** f est croissante sur $\mathbb{R}^*$

❒ **C.** $f'(x) = \frac{1}{2x^2\sqrt{x^2+1}}$

❒ **D.** f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$

❒ **E.** f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

7. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

❒ **A.** $f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{x^2}$

❒ **B.** f n'est pas monotone sur $]0, +\infty[$

❒ **C.** $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x}$

❒ **D.** f est monotone sur $\mathbb{R}$

❒ **E.** $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$

8. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$

❒ **A.** $f'(x) = \dfrac{(2-x)e^x}{x^3}$

❒ **B.** f est monotone sur $]0, +\infty[$

❒ **C.** $f'(x) = \dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$

❒ **D.** f est monotone sur $\mathbb{R}$

❒ **E.** f est décroissante sur $[2, +\infty[$

9. $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$

❒ **A.** $f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$

❒ **B.** f est croissante sur $]0, +\infty[$

❒ **C.** $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}$

❒ **D.** f est croissante sur $]1, +\infty[$

❒ **E.** $f'(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$

10. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

❒ **A.** $f'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

❒ **B.** f est croissante sur $]0, +\infty[$

❒ **C.** $f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

❒ **D.** f est croissante sur $[0, +\infty[$

❒ **E.** f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$

CORRIGÉS

1. Réponse B.

f est de la forme $\sqrt{u}$ et sa dérivée est donc de la forme $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ et ainsi avec $u = 2x^2 + 3x + 1$ et $u' = 4x + 3$, vous obtenez la dérivée de $f(x)$:

$f'(x) = \dfrac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x+1}}$. Donc les propositions **A** et **E** sont fausses et la **B** est vraie.

f est définie pour tout x tel que $2x^2 + 3x + 1 \geq 0$ mais dérivable pour tout x tel que : $2x^2 + 3x + 1 > 0$. Vous calculez le discriminant $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$ donc le polynôme sous la racine admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-3-1}{2\times 2} = \dfrac{-4}{4} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-3+1}{2\times 2} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$. Donc le polynôme est du signe de $a = 2 > 0$ à l'extérieur des racines, soit pour $x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ et du signe de $-a = -2 < 0$ à l'intérieur des racines soit pour $x \in \left]-1;-\dfrac{1}{2}\right[$.

Finalement f est définie sur $\left]-\infty;-1\right] \cup \left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ et dérivable pour tout $x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

f n'est donc pas dérivable en $x = -\dfrac{1}{2}$ ni en $x = -1$. Donc les propositions **C** et **D** sont fausses.

Remarque : Vous auriez pu également calculer la dérivée en utilisant la formule $(uov)' = v' \times u'ov$ où $u(x) = \sqrt{x}$, $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $v(x) = 2x^2 + 3x + 1$ et $v'(x) = 4x + 3$.

2. Réponse D.

$\dfrac{1}{x} + 2 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1+2x}{x} > 0$ En effectuant un tableau de signes, vous obtenez :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		0		$+\infty$
$1 + 2x$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{1+2x}{x}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

Ainsi la fonction f est définie sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0;+\infty\right[$ et dérivable pour $x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0;+\infty\right[$. Et les propositions **A** et **C** sont fausses. Pour calculer la dérivée de $f(x)$, vous utilisez les formules de dérivation d'un logarithme népérien : $\left(\ln(v)\right)'=\frac{v'}{v}$ et d'une racine carrée : $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $v=\sqrt{\frac{1}{x}+2}$ et $u=\frac{1}{x}+2$

Vous en déduisez que la dérivée de la fonction f est donnée par :

$$f'(x)=\frac{\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x}+2}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+2}}=\frac{-\frac{1}{x^2}}{2\left(\frac{1}{x}+2\right)}=-\frac{1}{2x^2\left(\frac{1}{x}+2\right)}=-\frac{1}{2x+4x^2}=-\frac{1}{2x\left(2x+1\right)}\text{ donc}$$

les propositions **B** et **E** sont fausses et **D** est vraie.

Astuce : Pour le calcul de la dérivée, vous pouviez aussi remarquer que

$$f(x)=\ln\left(\sqrt{\frac{1}{x}+2}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}+2\right)=\frac{1}{2}\left(\ln(1+2n)-\ln x\right)=\frac{1}{2}\ln\left(1+2x\right)-\frac{1}{2}\ln(x)$$

3. Réponse A.

Vous devez utiliser la formule de la dérivée d'un quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

où $u(x)=x^2-x$, $u'(x)=2x-1$, $v(x)=\ln(x)$ et $v'(x)=\frac{1}{x}$

$$f'(x)=\frac{(2x-1)\ln(x)-\left(x^2-x\right)\times\frac{1}{x}}{\ln^2(x)}=\frac{(2x-1)\ln(x)-(x-1)}{\ln^2(x)}=\frac{(2x-1)\ln(x)-x+1}{\ln^2(x)}$$

Donc **A** est correcte et **B**, **C** **D** et **E** sont fausses.

4. Réponses D et E.

$h(x)=(2x-1)\ln(x)-x+1$, h est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme étant la somme et le produit de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle.

À partir des formules de dérivation du produit de deux fonctions $(uv)'=u'v+uv'$, vous obtenez la dérivée de $h(x)$:

$$h'(x)=2\ln(x)+(2x-1)\times\frac{1}{x}-1=2\ln(x)+2-\frac{1}{x}-1=2\ln(x)+1-\frac{1}{x}$$

Vous en concluez que **A** et **B** sont fausses et que **E** est vraie. En redérivant $h(x)$ une seconde fois, vous obtenez $h''(x)$ qui vous donne les variations de h' qui vous permettent d'en déduire son signe et finalement les variations de h sur $]0\ ;+\infty[$. $h''(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ pour $x > 0$. Ainsi h' est strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$ et **C** est fausse. Vous calculez ensuite les limites de h' en 0 et en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \to 0^+} h'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2\ln(x) + 1 - \frac{1}{x} = -\infty \Rightarrow$ la courbe représentative de h' admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ au voisinage de 0.

$$\lim_{x \to +\infty} h'(x) = \lim_{x \to +\infty} 2\ln(x) + 1 - \frac{1}{x} = +\infty$$

Vous déduisez le tableau de variations de h', puis son signe et les variations de h :

x	0		α		$+\infty$
$h''(x)$		$+$		$+$	
h'	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	1	↘	$h(\alpha)$	↗	$+\infty$

h' est strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$ donc monotone sur ce même intervalle. De plus sa limite en 0 est égale à $-\infty < 0$ et sa limite en $+\infty$ est égale à $+\infty > 0$.

Le théorème de la bijection vous permet donc de conclure qu'il existe un unique réel α de $]0\ ;+\infty[$ tel que $h'(\alpha) = 0$. Vous déduisez ainsi le signe de $h'(x)$ puis les variations de h qui est décroissante puis croissante. Ainsi la proposition **D** est vraie.

Remarque : Après tâtonnements, vous devinez facilement que $\alpha = 1$. Lorsque α ne s'obtient pas facilement, vous utilisez la calculatrice, pour en déduire un encadrement de α.

Vous pouvez ensuite dresser le tableau de signes de $f'(x)$ puis de variations de f (fonction définie dans la question 3) en remarquant que $f'(x) = \frac{(2x-1)\ln(x) - x + 1}{\ln^2(x)} = \frac{h(x)}{\ln^2(x)}$ et ainsi :

x	0		1		$+\infty$
h	1	↘	0	↗	$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$+$	
$\ln^2(x)$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
f	0	↗	1 ‖ 1	↗	$+\infty$

f est définie pour $x \in \,]0\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$

Limites aux bornes de l'ensemble de définition de f :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - x}{\ln(x)} = 0$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x) - \ln(1)} \times x = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1}} \times x = \frac{1}{1} \times 1 = 1$$

en utilisant la limite du taux de variations de la fonction $x \to \ln(x)$ en $x = 1$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - x}{\ln(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{\ln(x)} = +\infty$$ par croissances comparées

5. Réponse C.

En appliquant les formules de la dérivée d'une exponentielle : $(e^u)' = u' e^u$ et de la dérivée d'un quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ vous obtenez la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$: $f'(x) = \frac{e^{x+1} \times x - e^{x+1} \times 1}{x^2} = \frac{e^{x+1}(x-1)}{x^2}$ pour tout x réel différent de 0.

Vous en déduisez que **A** est fausse et **C** est vraie.

Vous dressez ensuite le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
e^{x+1}		+		+		+	
$x - 1$		−		−	0	+	
x^2		+	0	+		+	
$f'(x)$		−	‖	−	0	+	
f	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	e^2	↗	$+\infty$

Pour remplir le tableau de variations de f, vous devez déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition. N'oubliez pas lors d'une étude de fonction de déduire les asymptotes éventuelles :

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{x+1}}{x} = 0 \Rightarrow \text{asymptote horizontale } y = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{x+1}}{x} = -\infty \Rightarrow \text{asymptote verticale } x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x+1}}{x} = +\infty \Rightarrow \text{asymptote verticale } x = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x+1}}{x} = +\infty$$ par croissances comparées.

Vous déduisez à partir du tableau de variations de f que les propositions **B, D** et **E** sont fausses.

6. Réponse A.

$$f'(x)=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\times 2x-\sqrt{x^2+1}\times 2}{(2x)^2}=\frac{\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+1}\times 2}{4x^2}=\frac{\frac{2x^2-2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{4x^2}$$

$f'(x)=\dfrac{-2}{4x^2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{-1}{2x^2\sqrt{x^2+1}}<0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Donc **A** est vraie, **B, C, D** et **E** sont fausses.

7. Réponses B et **E.**

$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln(x)\times 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$ donc **A** et **C** sont fausses et **E** est vraie.

Puis en effectuant le tableau de signes de $f'(x)$, vous déduisez les variations de f :

x	0		e		$+\infty$
$1-\ln(x)$		+	0	−	
x^2		+		+	
$f'(x)$		+	0	−	
f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

f est bien croissante puis décroissante sur $]0,+\infty[$. Donc f n'est pas monotone sur cet intervalle et **B** est vraie et **D** est fausse.

8. Réponse C.

$f'(x)=\dfrac{e^x\times x^2-e^x\times 2x}{x^4}=\dfrac{(x^2-2x)e^x}{x^4}=\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$ donc **C** est vraie et **A** est fausse.

Puis en effectuant le tableau de signes de $f'(x)$, vous déduisez les variations de f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x-2$		−		−	0	+	
x^3		−	0	+		+	
e^x		+		+		+	
$f'(x)$		+	‖	−	0	+	
f	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{e^2}{4}$	↗	$+\infty$

f est décroissante puis croissante sur $]0,+\infty[$ donc n'est pas monotone sur cet intervalle. Ainsi **B** est fausse. Elle n'est pas non plus monotone sur $\mathbb{R}$, donc **D** et **E** sont fausses.

9. Réponse A.

f est de la forme $f(x)=\sqrt{u(x)}$ où $u(x)=\ln(x)$ donc sa dérivée est $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

avec $u'(x)=\dfrac{1}{x}$. Ainsi : $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln(x)}}=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$ donc **A** est vraie et **C** et **E** sont fausses.

Par ailleurs, $f'(x)>0$ sur $]1, +\infty[$ car une racine est toujours positive et $x>0$ sur cet intervalle. Donc f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Donc **B** est fausse et **D** est vraie.

Attention : f est définie sur $[1, +\infty[$ mais dérivable sur $]1, +\infty[$ (voir le chapitre sur les fonctions usuelles, paragraphe sur la fonction racine carrée).

10. Réponses A et E.

f est de la forme $f(x)=\dfrac{1}{u(x)}$ où $u(x)=\sqrt{x}$ donc sa dérivée est $f'(x)=-\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$

avec $u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Ainsi : $f'(x)=-\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=-\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ donc **A** est vraie et **C** est fausse. Vous remarquez de plus que $f'(x)<0$ (quotient strictement positif avec un signe « moins » le précédant) donc f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et **B** et **D** sont fausses et **E** est vraie.

Chapitre 7

LES FONCTIONS USUELLES

Je fais le point sur mes connaissances

✓ Récapitulatif des fonctions usuelles

Fonction	D_f et $D_{f'}$	Dérivée	Tableau de variations	Graphe
$ax + b$	$\mathbb{R}$	a	x : $-\infty$ … $+\infty$; $f'(x)$: signe de a ; f : croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$, constante si $a = 0$	Droite verticale ; Fonction linéaire ; Droite horizontale ; Coefficient directeur positif ; Coefficient directeur négatif
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$	x : $-\infty$, 0, $+\infty$; $f'(x)$: $-$ 0 $+$; f : $+\infty$ ↘ 0 ↗ $+\infty$	
$\sqrt{x}$	$D_f = [0\ ;+\infty[$ $D_{f'} =]0\ ;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	x : 0, $+\infty$; $f'(x)$: ‖ $+$; f : 0 ↗ $+\infty$	
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$	x : $-\infty$, 0, $+\infty$; $f'(x)$: $-$ ‖ $-$; f : 0 ↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘ 0	f

Fonction	D_f et $D_{f'}$	Dérivée	Tableau de variations	Graphe
x^3	$\mathbb{R}$	$3x^2$	x : $-\infty$ … $+\infty$; $f'(x)$: $+$; f : croissante de $-\infty$ à $+\infty$	
$\lvert x \rvert$	$D_f = \mathbb{R}$ $D_{f'} = \mathbb{R}^*$	1 ou -1	x : $-\infty$ … 0 … $+\infty$; $f'(x)$: $-$ ‖ $+$; f : décroissante de $+\infty$ à 0, puis croissante de 0 à $+\infty$	
$\ln(x)$	$]0\,;+\infty[$	$\frac{1}{x}$	x : 0 … $+\infty$; $f'(x)$: ‖ $+$; f : ‖ croissante de $-\infty$ à $+\infty$	
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	x : $-\infty$ … $+\infty$; $f'(x)$: $+$; f : croissante de 0 à $+\infty$	

Fonction	D_f et $D_{f'}$	Dérivée	Tableau de variations	Graphe
cos(x)	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	x : 0 … $\frac{\pi}{2}$ $f'(x)$: $-$ f : $1 \searrow 0$	
sin(x)	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	x : 0 … $\frac{\pi}{2}$ $f'(x)$: $+$ f : $0 \nearrow 1$	
tan(x)	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ $k\in\mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	x : 0 … $\frac{\pi}{2}$ $f'(x)$: $+$ f : $0 \nearrow +\infty$ ||	
cotan(x)	$\mathbb{R}\backslash\{k\pi\}$ $k\in\mathbb{Z}$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$	x : 0 … $\frac{\pi}{2}$ $f'(x)$: $-$ f : || $+\infty \searrow 0$	

✓ Égalité de deux fonctions

Deux fonctions f et g sont égales si et seulement si elles ont le même ensemble de définition et la même expression :

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} D_f = D_g \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

✓ **Composition de fonctions $g o f(x) = g(f(x))$**

Ensemble de définition : $D_{gof} = \begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases}$

Dérivée : $(gof)'(x) = f'(x) \times g' o f(x)$

Attention : ne confondez pas *fog* et *gof* !

✓ **Changement de repère avec pour repère d'origine (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) et a et b deux réels**

$g(x) = f(x + a)$: la courbe C_g est obtenue par translation de vecteur $-a\vec{i}$ de la courbe C_f

$g(x) = f(x) + b$: la courbe C_g est obtenue par translation de vecteur $b\vec{j}$ de la courbe C_f

$g(x) = f(x + a) + b$: la courbe C_g est obtenue par translation de vecteur $-a\vec{i} + b\vec{j}$ de la courbe C_f

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1 Composition de fonctions usuelles

Déterminez D_{fog} :

1. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$

❒ **A.** $D_{fog} =]0\,;+\infty[$
❒ **B.** $D_{fog} = [0\,;+\infty[$
❒ **C.** $D_{fog} = \mathbb{R}^*$
❒ **D.** $D_{fog} = [1\,;+\infty[$
❒ **E.** $D_{fog} =]1\,;+\infty[$

2. $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x + 1$

❒ **A.** $D_{fog} =]0\,;+\infty[$
❒ **B.** $D_{fog} = [0\,;+\infty[$
❒ **C.** $D_{fog} =]-1\,;+\infty[$
❒ **D.** $D_{fog} = [-1\,;+\infty[$
❒ **E.** $D_{fog} =]1\,;+\infty[$

3. $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$

❒ **A.** $D_{fog} =]0\,;+\infty[$
❒ **B.** $D_{fog} = [0\,;+\infty[$
❒ **C.** $D_{fog} =]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$
❒ **D.** $D_{fog} =]0\,;1]\cup]1\,;+\infty[$
❒ **E.** $D_{fog} =]1\,;+\infty[$

4. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = e^x$

❒ **A.** $D_{fog} =]0\,;+\infty[$
❒ **B.** $D_{fog} = \mathbb{R}$
❒ **C.** $D_{fog} = \mathbb{R}^*$
❒ **D.** $D_{fog} = [0\,;+\infty[$
❒ **E.** $D_{fog} = [1\,;+\infty[$

5. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$

❒ **A.** $D_{fog} =]0\,;+\infty[$
❒ **B.** $D_{fog} = \mathbb{R}^*$
❒ **C.** $D_{fog} = \mathbb{R}$
❒ **D.** $D_{fog} = [0\,;+\infty[$
❒ **E.** $D_{fog} = [1\,;+\infty[$

6. $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = |x|$

❒ **A.** $D_{fog} =]0\,;+\infty[$
❒ **B.** $D_{fog} = \mathbb{R}$
❒ **C.** $D_{fog} = [0\,;+\infty[$
❒ **D.** $D_{fog} = \mathbb{R}^*$
❒ **E.** $D_{fog} = [1\,;+\infty[$

7. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \ln(x)$

❒ **A.** $D_{fog} =]0\,;+\infty[$
❒ **B.** $D_{fog} = \mathbb{R}$
❒ **C.** $D_{fog} =]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$
❒ **D.** $D_{fog} = \mathbb{R}^*$
❒ **E.** $D_{fog} =]1\,;+\infty[$

8. $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$

❒ **A.** $D_{fog} =]0\ ;+\infty[$ ❒ **C.** $D_{fog} = [0\ ;+\infty[$ ❒ **E.** $D_{fog} =]1\ ;+\infty[$

❒ **B.** $D_{fog} = \mathbb{R}$ ❒ **D.** $D_{fog} = \mathbb{R}^*$

Exercice 2 Composition de fonctions usuelles

Déterminez *fog* (x) : (plusieurs réponses peuvent être correctes)

9. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$

❒ **A.** $fog(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ ❒ **C.** $fog\ (x) = \frac{1}{x}$ ❒ **E.** $fog\ (x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

❒ **B.** $fog(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$ ❒ **D.** $fog\ (x) = \sqrt{x}$

10. $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x + 1$

❒ **A.** $fog(x) = \ln(x + 1)$

❒ **B.** $fog(x) = \ln(x) + 1$

❒ **C.** $fog(x) = x\ln(x) + x$

❒ **D.** $fog(x) = \ln(x) + x$

❒ **E.** $fog(x) = \ln x + \frac{1}{x}$

11. $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = e^x$

❒ **A.** $fog(x) = \ln(x)$ ❒ **C.** $fog(x) = x^2$ ❒ **E.** $fog(x) = \sqrt{x}$

❒ **B.** $fog(x) = e^x$ ❒ **D.** $fog(x) = x$

12. $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x + 3$

❒ **A.** $fog(x) = \frac{1}{x} + 3$ ❒ **C.** $fog(x) = \frac{1}{x+3}$ ❒ **E.** $fog(x) = \frac{x}{3}$

❒ **B.** $fog(x) = \frac{3}{x}$ ❒ **D.** $fog(x) = 3x$

13. $f(x) = x$ et $g(x) = x$

❒ **A.** $fog(x) = x$ ❒ **C.** $fog(x) = 0$ ❒ **E.** $fog(x) = \frac{1}{x}$

❒ **B.** $fog(x) = x^2$ ❒ **D.** $fog(x) = 1$

Exercice 3 Égalité de fonctions

Cochez la ou les bonne(s) réponse(s) :

14. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ et $g(x) = x - 2$

❒ **A.** $f(x) = g(x)$ ❒ **C.** $D_f = D_g$ ❒ **E.** $f \neq g$

❒ **B.** $f(x) \neq g(x)$ ❒ **D.** $f = g$

Exercice 4 Changement de repère

Cochez la ou les bonne(s) réponse(s) :

15. Quelle transformation faut-il appliquer à la courbe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ pour obtenir celle de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$?

❒ **A.** Translation de vecteur $\vec{i}$

❒ **B.** Translation de vecteur $\vec{j}$

❒ **C.** Translation de vecteur $-\vec{i}$

❒ **D.** Translation de vecteur $\vec{j}$

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

16. Quelle transformation faut-il appliquer à la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ pour obtenir celle de la fonction $x \mapsto \sqrt{x} + 2$?

❒ **A.** Translation de vecteur $2\vec{i}$

❒ **B.** Translation de vecteur $2\vec{j}$

❒ **C.** Translation de vecteur $-2\vec{i}$

❒ **D.** Translation de vecteur $-2\vec{j}$

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

17. Quelle transformation faut-il appliquer à la courbe de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ pour obtenir celle de la fonction $x \mapsto \ln(x+3) - 2$?

❒ **A.** Translation de vecteur $3\vec{i} + 2\vec{j}$

❒ **B.** Translation de vecteur $2\vec{i} + 3\vec{j}$

❒ **C.** Translation de vecteur $-3\vec{i} - 2\vec{j}$

❒ **D.** Translation de vecteur $3\vec{i} - 2\vec{j}$

❒ **E.** Translation de vecteur $-2\vec{i} + 3\vec{j}$

18. Quelle transformation faut-il appliquer à la courbe de la fonction $x \mapsto x$ pour obtenir celle de la fonction $x \mapsto x+10$?

❒ **A.** Translation de vecteur $10\vec{i}$

❒ **B.** Translation de vecteur $10\vec{i}+10\vec{j}$

❒ **C.** Translation de vecteur $-10\vec{i}$

❒ **D.** Translation de vecteur $-5\vec{i}+5\vec{j}$

❒ **E.** Translation de vecteur $10\vec{j}$

CORRIGÉS

1. Réponse A.

D_{fog} est tel que x vérifie le système :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{1}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow D_{fog} =]0;+\infty[$$

2. Réponse C.

D_{fog} est tel que x vérifie le système :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1 \Leftrightarrow D_{fog} =]-1;+\infty[$$

3. Réponse A.

D_{fog} est tel que x vérifie le système :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{1}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow D_{fog} =]0;+\infty[$$

4. Réponse B.

D_{fog} est tel que x vérifie le système :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D_{fog} = \mathbb{R}$$

5. Réponse C.

D_{fog} est tel que x vérifie le système :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D_{fog} = \mathbb{R}$$

Remarque : dans l'exemple 5, *fog* est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

6. Réponse D.

D_{fog} est tel que x vérifie le système :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ |x| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow D_{fog} =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[= \mathbb{R}^*$$

7. Réponse C.

D_{fog} est tel que x vérifie le système :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow D_{fog} =]0;1[\cup]1;+\infty[$$

8. Réponse C.

D_{fog} est tel que x vérifie le système :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ g(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow D_{fog} = [0;+\infty[$$

Vous appliquez la relation $x \overset{g}{\longmapsto} g(x) \overset{f}{\longmapsto} f(g(x))$ **à chaque question.**

Attention : Ne pas confondre $fog(x)$ et $gof(x)$!

9. Réponses B et E.

$$fog(x) = f(g(x)) = \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)} = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

Remarque : $gof(x) = g(f(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$

Attention : Vous obtenez $fog(x) = gof(x)$. Cela est uniquement dû au hasard du calcul. En effet $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$ car $\sqrt{1} = 1$. Avec $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \dfrac{2}{x}$ par exemple, vous auriez eu $fog(x) = f(g(x)) = \sqrt{\left(\dfrac{2}{x}\right)} = \sqrt{\dfrac{2}{x}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$ et $gof(x) = g(f(x)) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et donc $fog(x) \neq gof(x)$

10. Réponse A.

$$fog(x) = f(g(x)) = \ln(x+1)$$

Remarque : $gof(x) = g(f(x)) = \ln(x) + 1$

11. Réponse D.

$$fog(x) = f(g(x)) = \ln(e^x) = x$$

Remarque : $gof(x) = g(f(x)) = e^{\ln(x)} = x = fog(x)$.
Vous obtenez ici $fog(x) = gof(x)$. Cette égalité vient du fait que les fonctions logarithme népérien et exponentielle sont réciproques. Leur composition donne x, soit la fonction identité.

Attention : En revanche fog et gof ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble de définition.

12. Réponse C.

$$fog(x) = f(g(x)) = \frac{1}{x+3}$$

Remarque : $gof(x) = g(f(x)) = \frac{1}{x} + 3$

13. Réponse A.

$fog(x) = f(g(x)) = x$

Remarque : $gof(x) = x = fog(x)$

14. Réponses A et E.

$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} = \frac{(x-2)(x-1)}{x-1} = x - 2 = g(x)$ donc $f(x) = g(x)$.

f est définie pour tout x différent de 1, soit $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

g est définie pour tout x de $\mathbb{R}$, soit $D_g = \mathbb{R}$.

Ainsi f et g n'ont pas le même ensemble de définition malgré la même expression. Elles ne sont donc pas égales et donc $f \neq g$.

Attention : $f = g \Leftrightarrow \begin{cases} D_f = D_g \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

15. Réponse A. La courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est obtenue en effectuant une translation de vecteur $\vec{i}$ de la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$

Remarque : $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est la composée de la fonction $x \mapsto x - 1$ par la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$

16. Réponse B.

La courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x} + 2$ est obtenue en effectuant une translation de vecteur $2\vec{j}$ de la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

Remarque : $x \mapsto \sqrt{x} + 2$ est la composée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ par la fonction $x \mapsto x + 2$

17. Réponse C.

La courbe de la fonction $x \mapsto \ln(x+3) - 2$ est obtenue en effectuant une translation de vecteur $-3\vec{i} - 2\vec{j}$ de la courbe de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.

18. Réponses C et E.

La courbe de la fonction $x \mapsto x + 10$ est obtenue en effectuant une translation de vecteur $-10\vec{i}$ de la courbe de la fonction $x \mapsto x$.

Elle est aussi obtenue en effectuant une translation de vecteur $10\vec{j}$ de la courbe de la fonction $x \mapsto x$

Chapitre 8

LES PRIMITIVES ET INTÉGRALES

Je fais le point sur mes connaissances

✓ Tableau des primitives

Fonction	Primitive
0	constante
1	x + constante
a	ax + constante
x	$\frac{1}{2}x^2$ + constante
ax	$\frac{1}{2}ax^2$ + constante
x^2	$\frac{1}{3}x^3$ + constante
ax^2	$\frac{1}{3}ax^3$ + constante
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ + constante
ax^n	$\frac{a}{n+1}x^{n+1}$ + constante
$\frac{1}{x}, x \neq 0$	$\ln\lvert x\rvert$ + constante, $x \neq 0$
$\frac{1}{x^2}, x \neq 0$	$-\frac{1}{x}$ + constante, $x \neq 0$
$\frac{1}{x^n}, n > 1, x \neq 0$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ + constante, $n > 1, x \neq 0$
$\frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0$	$2\sqrt{x}$ + constante, $x > 0$
e^x	e^x + constante

Fonction	Primitive
$e^{ax+b}, a \neq 0$	$\frac{1}{a} e^{ax+b}$ + constante, $a \neq 0$
$\cos(x)$	$\sin(x)$ + constante
$\sin(x)$	$-\cos(x)$ + constante
$\tan(x), x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	$-\ln\|\cos(x)\|$ + constante
$\text{cotan}(x), x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	$\ln\|\sin(x)\|$ + constante

✓ **Formules faisant intervenir des fonctions**

Fonction	Primitive
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$ + constante
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\|u(x)\|$ + constante
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}$ + constante
$u'(x)u^n(x)$	$\frac{1}{n+1} \times u^{n+1}(x)$ + constante
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x))$ + constante
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x))$ + constante
$u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$	$u(x) \times v(x)$ + constante
$\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$	$\frac{u(x)}{v(x)}$ + constante

Attention : Il est important de retenir qu'une fonction admet une infinité de primitives (ceci est lié à la constante d'intégration). N'écrivez jamais $f(x)$ admet la primitive $F(x)$ mais UNE primitive $F(x)$!

En revanche, vous pouvez affirmer par exemple que LA primitive de $f(x)$ qui s'annule en telle ou telle valeur est $F(x)$.

Par exemple la primitive de $f(x) = 2x$ qui s'annule en 1 est $F(x) = x^2 – 1$. En effet, une primitive de $f(x)$ est $F(x) = x^2 + C$ et il vous est précisé que $F(0) = 0$ ce qui revient à $1^2 + C = 0$, soit $C = – 1$. La primitive de $f(x)$ qui s'annule en $x = 1$ est donc $F(x) = x^2 – 1$.

✓ **Relation de Chasles**

$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ avec f continue sur $[a ; c]$, $[a ; b]$ et $[b ; c]$

✓ **Croissance de l'intégrale**

$\forall x \in [a ; b], f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ avec f et g continues sur $[a ; b]$

✓ **Parité et périodicité**

Si f est paire, alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Si f est impaire, alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Si f est périodique de période T, alors : $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

✓ **Moyenne d'une fonction**

$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ avec f continue sur $[a ; b]$

✓ **Changement de variables**

$u = h(x) \Leftrightarrow x = h^{-1}(u) \Rightarrow \mathrm{d}x = h^{-1}{}'(u)\mathrm{d}u$

Attention

N'oubliez pas de modifier les bornes !

Quand x = borne inférieure alors $u = h$(borne inférieure)

Quand x = borne supérieure alors $u = h$(borne supérieure)

✓ **Intégration par parties**

$$\int_a^b u(x)\times v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\times v(x)dx$$

Cette formule est utilisée, par exemple, pour démontrer qu'une primitive de $x \to \ln(x)$ est $x\ln(x) - x$:

En posant : $\begin{cases} u = \ln(x) \\ v' = 1 \end{cases}$, vous obtenez en dérivant u et en intégrant v' : $\begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = x \end{cases}$,

puis en appliquant la formule d'intégration par parties :

$$\int \ln(x)dx = \int 1\times\ln(x)dx = \left[\ln(x)\times x\right] - \int \frac{1}{x}\times x dx = \left[x\ln(x)\right] - \int 1dx = \left[x\ln(x)\right] - \left[x\right] = \left[x\ln(x) - x\right]$$

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1 Primitives

Calculez une primitive des fonctions suivantes : (plusieurs réponses sont possibles)

1. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

❒ **A.** $F(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$

❒ **B.** $F(x) = x^2 + x$

❒ **C.** $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$

❒ **D.** $F(x) = 4x^2 + 1$

❒ **E.** $F(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$

2. $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$

❒ **A.** $F(x) = \ln|\ln(x)|$

❒ **B.** $F(x) = \ln(\ln(x))$

❒ **C.** $F(x) = \ln(\ln|x|)$

❒ **D.** $F(x) = \ln|\ln|x||$

❒ **E.** $F(x) = \ln|\ln(x)| + 1$

3. $f(x) = \frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2 - 1}$

❒ **A.** $F(x) = \ln(x^3 + 2x^2 - 1)$

❒ **B.** $F(x) = \ln|x^3 + 2x^2 - 1|$

❒ **C.** $F(x) = \ln|3x^2 + 4x|$

❒ **D.** $F(x) = \ln(3x^2 + 4x)$

❒ **E.** $F(x) = \frac{1}{x^3 + 2x^2 - 1}$

4. $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

❒ **A.** $F(x) = \ln|x^2 - 1|$

❒ **B.** $F(x) = \ln|2x|$

❒ **C.** $F(x) = \ln(2x)$

❒ **D.** $F(x) = \ln(x^2 + 1)$

❒ **E.** $F(x) = \ln(x^2 - 1)$

5. $f(x) = e^{2x+1}$

❒ **A.** $F(x) = \frac{1}{2}e^2$

❒ **B.** $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1}$

❒ **C.** $F(x) = e^{2x+1}$

❒ **D.** $F(x) = e^2$

❒ **E.** $F(x) = 2e^{2x+1}$

Exercice 2 Intégrales

Calculez les intégrales suivantes : (plusieurs réponses sont possibles)

6. $I = \int_1^2 x\,dx$

❒ **A.** $I = \frac{1}{2}x^2$

❒ **B.** $I = \frac{7}{2}$

❒ **C.** $I = \frac{3}{2}$

❒ **D.** $I = \frac{1}{2}$

❒ **E.** $I = 0$

7. $I = \int_0^1 \frac{2\,e^x}{e^x+1}\,dx$

❒ **A.** $I = \ln\sqrt{\frac{e+1}{2}}$

❒ **B.** $I = \sqrt{\frac{e+1}{2}}$

❒ **C.** $I = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$

❒ **D.** $I = \ln\left(\left(\frac{e+1}{2}\right)^2\right)$

❒ **E.** $I = 2\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$

8. $I = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$

❒ **A.** $I = \ln(3)$

❒ **B.** $I = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

❒ **C.** $I = \ln(2)$

❒ **D.** $I = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

❒ **E.** $I = -\ln(3)$

9. $I = \int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}\,dx$

❒ **A.** $I = \sqrt{3}$

❒ **B.** $I = \sqrt{2}$

❒ **C.** $I = 1$

❒ **D.** $I = 3$

❒ **E.** $I = 4$

10. $I = \int_2^{16} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\ln(x)}}\,dx$

❒ **A.** $I = 8\sqrt{\ln(2)}$

❒ **B.** $I = 6\sqrt{\ln(2)}$

❒ **C.** $I = 2\sqrt{\ln(2)}$

❒ **D.** $I = \ln(2)$

❒ **E.** $I = \sqrt{\ln(2)}$

CORRIGÉS

1. Réponse A. Une primitive de $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ est $F(x)=\frac{1}{4}x^2+x+C$ où C est une constante réelle. Ainsi en choisissant $C=0$, vous concluez que $F(x)=\frac{1}{4}x^2+x$ est une primitive de $f(x)$.

2. Réponses A et E.

En modifiant l'expression de $f(x)$, vous obtenez : $f(x)=\frac{1}{x\ln(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$, ce qui est de la forme $\frac{u'}{u}$ et qui a donc pour primitive, $\ln|u|+C$.

Ainsi une primitive de $f(x)$ est $F(x)=\ln|\ln(x)|+C$ et en choisissant à nouveau $C=0$, vous obtenez $F(x)=\ln|\ln(x)|$.

En choisissant $C=1$, vous obtenez $F(x)=\ln|\ln(x)|+1$

Attention : N'oubliez pas les valeurs absolues lorsque vous intégrez une expression de la forme $\frac{u'}{u}$.

3. Réponse B.

La fonction f définie par $f(x)=\frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2-1}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ qui a pour primitive $\ln|u|+C$.

Ainsi une primitive de $f(x)$ est $F(x)=\ln|x^3+2x^2-1|+C$ et en choisissant à nouveau $C=0$, vous obtenez $F(x)=\ln|x^3+2x^2-1|$.

4. Réponse D.

La fonction définie par $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ qui a pour primitive $\ln|u|+C$.

Ainsi une primitive de $f(x)$ est $F(x)=\ln|x^2+1|+C$ et en choisissant toujours $C=0$, vous obtenez $F(x)=\ln|x^2+1|$.

Or l'expression x^2+1 est toujours strictement positive car $x^2\geq 0$ par définition d'un carré et en ajoutant 1, vous déduisez $x^2+1>0$. Vous pouvez donc enlever la valeur absolue et une primitive de $f(x)$ est alors : $F(x)=\ln(x^2+1)$.

5. Réponse B.

La fonction définie par $f(x)=e^{2x+1}$ admet pour primitive $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+1}+C$ et en choisissant $C=0$, vous obtenez qu'une primitive de $f(x)$ est $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+1}$.

Attention (pour les question 6 à 10) : Avant de calculer une intégrale, il est important de vérifier que la fonction à intégrer est bien continue sur l'intervalle défini par les bornes. Dans la question 6, la fonction $x \to x$ est continue sur l'intervalle [1 ; 2] comme étant une fonction usuelle.

6. Réponse C.

$$I = \int_1^2 x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}\times 2^2 - \frac{1}{2}\times 1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

7. Réponses D et E.

$$I = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}dx = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}dx = 2\left[\ln|\mathrm{e}^x+1|\right]_0^1 = 2\left[\ln(\mathrm{e}^x+1)\right]_0^1 = 2\ln(\mathrm{e}^1+1) - 2\ln(\mathrm{e}^0+1)$$

Vous pouvez enlever les valeurs absolues car $\mathrm{e}^x + 1$ est toujours strictement positif.

$$I = 2\ln(\mathrm{e}+1) - 2\ln(2) = 2\ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2}\right) = \ln\left(\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2}\right)^2\right)$$

8. Réponses D et E.

$$I = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{x}dx = \left[\ln|x|\right]_{-3}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-3| = \ln(1) - \ln(3) = -\ln(3) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

Attention : N'oubliez pas les valeurs absolues lorsque vous intégrez une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$: $\int \frac{u'}{u} = \ln|u| + C$

9. Réponse C.

$$I = \int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}dx = \left[\sqrt{3x^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{3\times 1^2+1} - \sqrt{3\times 0^2+1} =$$

$$\sqrt{4} - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1$$

10. Réponse C.

$$I = \int_2^{16} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\ln(x)}}dx = \left[2\sqrt{\ln(x)}\right]_2^{16} = 2\sqrt{\ln(16)} - 2\sqrt{\ln(2)} = 2\sqrt{4\ln(2)} - 2\sqrt{\ln(2)}$$

(car $16 = 2^4$)

$$I = 2\times 2\sqrt{\ln(2)} - 2\sqrt{\ln(2)} = 4\sqrt{\ln(2)} - 2\sqrt{\ln(2)} = 2\sqrt{\ln(2)}$$

Chapitre 9

LES SUITES

Je fais le point sur mes connaissances

✓ **Suites arithmétiques et géométriques**

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Expression du terme général U_n	$U_n = U_0 + nr$ $U_n = U_1 + (n-1)r$	$U_n = U_0 \times q^n$ $U_n = U_1 \times q^{n-1}$
Plus généralement	$U_n = U_p + (n-p)r$	$U_n = U_p \times q^{n-p}$
Somme des $(n+1)$ ou n 1ers termes	$\sum_{k=0}^{n} U_k = \frac{U_0 + U_n}{2} \times (n+1)$ $\sum_{k=1}^{n} U_k = \frac{U_1 + U_n}{2} \times n$	$\sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\sum_{k=1}^{n} U_k = U_1 \times \frac{1-q^{n}}{1-q}$

✓ **Suites arithmético-géométriques :** $\begin{cases} U_{n+1} = aU_n + b \\ U_0 \end{cases}$

Comment déterminer l'expression de (U_n) en fonction de n ?

- Posez $V_n = U_n - \frac{b}{1-a}$.
- Montrez que (V_n) est géométrique de raison a et de premier terme $V_0 = U_0 - \frac{b}{1-a}$
- Déduisez l'expression de (V_n) puis celle de (U_n) en fonction de n :

$$V_n = \left(U_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n \text{ et donc } U_n = \left(U_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n + \frac{b}{1-a}$$

Je sais définir

✓ Une suite arithmétique ou géométrique

✓ La raison d'une suite arithmétique ou géométrique

✓ Le premier terme d'une suite

✓ Une suite monotone

✓ Deux suites adjacentes : on dit que (U_n) et (V_n) sont adjacentes si et seulement si (U_n) est croissante, (V_n) décroissante et $\lim_{n \to +\infty} |U_n - V_n| = 0$

Je sais maîtriser

✓ Démontrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique

✓ Déterminer le sens de variations d'une suite

Vous étudiez le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$:

- $U_{n+1} - U_n > 0 \Rightarrow (U_n)$ croissante
- $U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow (U_n)$ décroissante
- $U_{n+1} - U_n = 0 \Rightarrow (U_n)$ constante

Ou bien vous comparez le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1 (avec U_{n+1} et U_n strictement positifs) :

- $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1 \Rightarrow (U_n)$ croissante
- $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1 \Rightarrow (U_n)$ décroissante
- $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 \Rightarrow (U_n)$ constante

✓ Déterminer si une suite est convergente, divergente ou sans limite

Une suite croissante et majorée est convergente.
Une suite décroissante et minorée est convergente.

Attention : Ne pas confondre une suite divergente avec une suite n'ayant pas de limite.
Une suite divergente admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$.
Une suite n'ayant pas de limite n'admet aucune limite. Par exemple, la suite (U_n) définie par $U_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite. Elle vaut alternativement (-1) et 1.

✓ Déterminer la limite d'une suite

✓ Le raisonnement par récurrence

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1 Sens de variations d'une suite

Pour chaque item sélectionnez la ou les bonne(s) réponse(s).

1. La suite définie par $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$ est :

❒ **A.** Croissante
❒ **B.** Décroissante
❒ **C.** Constante
❒ **D.** Arithmétique de raison 0,5
❒ **E.** Géométrique de raison 2

2. La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $U_{n+1} = U_n + 3$ est :

❒ **A.** Croissante
❒ **B.** Décroissante
❒ **C.** Constante
❒ **D.** Arithmétique de raison 0,5
❒ **E.** Géométrique de raison 3

3. La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2 + 1$ est :

❒ **A.** Croissante
❒ **B.** Décroissante
❒ **C.** Constante
❒ **D.** Géométrique de raison 0,5
❒ **E.** Arithmétique de raison 1

4. La suite définie pour tout $n \geq 2$, par $U_n = \sqrt{n-1}$ est :

❒ **A.** Croissante
❒ **B.** Décroissante
❒ **C.** Constante
❒ **D.** Arithmétique de raison 1
❒ **E.** Géométrique de raison 1

5. La suite définie pour tout $n \geq 2$, par $U_n = e^n \times \ln(n)$ est :

❒ **A.** Croissante
❒ **B.** Décroissante
❒ **C.** Constante
❒ **D.** Arithmétique de raison e
❒ **E.** Géométrique de raison e

Exercice 2 Limite d'une suite

Pour chaque item sélectionnez la bonne réponse.

6. La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $U_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \times 2$ a pour limite :

❒ **A.** $+\infty$
❒ **B.** 2
❒ **C.** 0
❒ **D.** N'admet pas de limite
❒ **E.** Aucune réponse ne convient

7. La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $U_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \times 2$ a pour limite :

❐ **A.** $+\infty$
❐ **B.** 2
❐ **C.** 0
❐ **D.** N'admet pas de limite
❐ **E.** Aucune réponse ne convient

8. La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $\begin{cases} U_{n+1} = -2U_n + 4 \\ U_0 = 0 \end{cases}$ a pour limite :

❐ **A.** $+\infty$
❐ **B.** $\frac{4}{3}$
❐ **C.** 0
❐ **D.** N'admet pas de limite
❐ **E.** Aucune réponse ne convient

9. La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $\begin{cases} U_n = \sqrt{U_{n-1}} \\ U_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$ a pour limite :

❐ **A.** $+\infty$
❐ **B.** 1
❐ **C.** 0
❐ **D.** N'admet pas de limite
❐ **E.** Aucune réponse ne convient

10. La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $U_n = (-1)^n$ a pour limite :

❐ **A.** $+\infty$
❐ **B.** 2
❐ **C.** 0
❐ **D.** N'admet pas de limite
❐ **E.** Aucune réponse ne convient

Exercice 3 Suites arithmétiques et géométriques

Pour chaque item, sélectionnez la bonne réponse.

11. Déterminez l'expression de la suite arithmétique U_n en fonction de n sachant que $U_0 = 2$ et $U_8 = 10$

❐ **A.** $2 + n$
❐ **B.** $10n$
❐ **C.** $8n + 2$
❐ **D.** $8n$
❐ **E.** $n - 2$

12. Déterminez l'expression de la suite géométrique V_n en fonction de n sachant que $V_0 = 4$ et $V_{10} = \frac{1}{256}$

❐ **A.** 4×2^n
❐ **B.** $4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$
❐ **C.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
❐ **D.** 4×2^n
❐ **E.** $4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

CORRIGÉS

1. Réponse B.

Vous utilisez la formule du quotient (car pour tout entier naturel n, $U_n > 0$) pour déterminer le sens de variations de la suite (U_n) : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{1}{2}U_n}{U_n} = \frac{1}{2} < 1$ donc (U_n) est strictement décroissante.

Remarque : Utilisez la formule du quotient plutôt que celle de la différence, les calculs sont plus rapides. Attention à bien comparer le quotient à 1 et non à 0 !

Vous reconnaissez une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

2. Réponse A.

Vous utilisez la formule de la différence pour déterminer le sens de variations de la suite (U_n) : $U_{n+1} - U_n = U_n + 3 - U_n = 3 > 0$ donc (U_n) est strictement croissante.

Remarque : Utilisez la formule de la différence plutôt que celle du quotient, les calculs sont plus rapides. Attention à bien comparer la différence à 0 et non à 1 !

Vous reconnaissez une suite arithmétique de raison 3.

3. Réponse B.

Vous utilisez la formule de la différence pour déterminer le sens de variations de la suite(U_n): $U_{n+1} - U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times 2 + 1 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times 2 + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times 2 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times 2\right)$

$$U_{n+1} - U_n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times 2\right)\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times 2\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n} < 0$$

donc (U_n) est strictement décroissante.

Remarque : Utilisez la formule de la différence plutôt que celle du quotient, les calculs sont plus rapides. Attention à bien comparer la différence à 0 et non à 1 !

4. Réponse A.

Vous utilisez la formule du quotient (car les termes de la suite sont > 0 étant donné que ce sont des racines carrées) pour déterminer le sens de variations de la suite (U_n) : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} > 1$ pour $n \geq 2$ car $n > n - 1$, et donc :

$\frac{n}{n-1} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{n}{n-1}} > \sqrt{1} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{n}{n-1}} > 1 \Leftrightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ et finalement (U_n) est strictement croissante.

Remarque : Utilisez la formule du quotient plutôt que celle de la différence, les calculs sont plus rapides ! Attention à bien comparer le quotient à 1 et non à 0 !

5. Réponse A.

Vous utilisez la formule de la différence pour déterminer le sens de variations de la suite (U_n) :

$$U_{n+1} - U_n = \mathrm{e}^{n+1} \times \ln(n+1) - \mathrm{e}^n \times \ln(n) = \mathrm{e}^n \times \left(\mathrm{e}\ln(n+1) - \ln(n)\right) = \mathrm{e}^n \times \left(\ln(n+1)^{\mathrm{e}} - \ln(n)\right)$$

$U_{n+1} - U_n = \mathrm{e}^n \times \ln\left(\frac{(n+1)^e}{n}\right) > 0$ car $\frac{(n+1)^e}{n} > 1$ donc $\ln\left(\frac{(n+1)^e}{n}\right) > 0$ pour $n \geq 2$ donc (U_n) est strictement croissante.

Remarque : Utilisez la formule de la différence plutôt que celle du quotient, les calculs sont plus rapides ! Attention à bien comparer la différence à 0 et non à 1 !

Rappels : $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$; $\ln(a^n) = n\ln(a)$; $\ln(a) > 0 \Leftrightarrow a > 1$

6. Réponse A.

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \times 2 = +\infty$ car $\frac{4}{3} > 1$ et donc $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Rappel : Si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

7. Réponse C.

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \times 2 = 0$ car $\frac{3}{4} < 1$ et donc $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

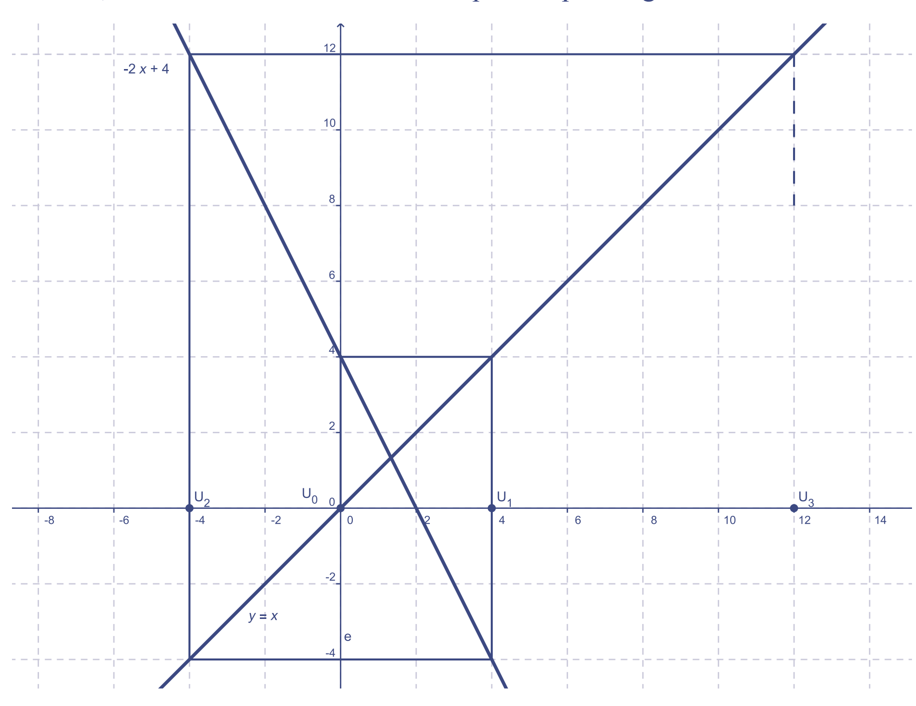
Rappel : Si $|q| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

8. Réponse D.

Vous devez déterminer les points fixes de $f(x) = -2x + 4$. Ils vérifient :

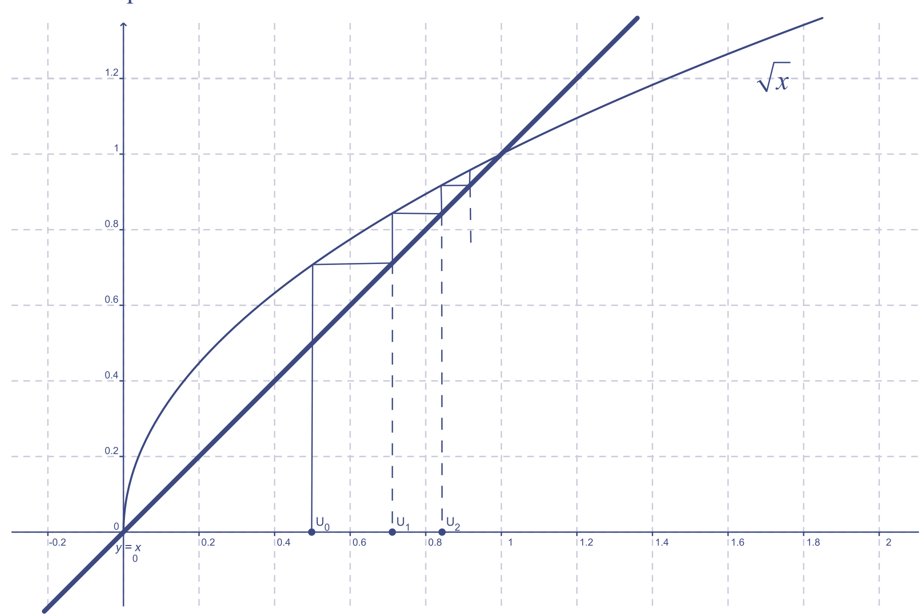
$x = -2x + 4 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$. Vous tracez ensuite la courbe qui vous permet d'affirmer que la suite n'admet pas de limite.

En effet, ses termes sont successivement positifs puis négatifs.



9. Réponse B.

Vous devez déterminer les points fixes de $f(x) = \sqrt{x}$. Ils vérifient : $x = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$. Vous tracez ensuite la courbe qui vous permet d'affirmer que la limite de la suite est 1.



10. Réponse D.

La suite vaut alternativement 1 ou − 1 suivant que n soit pair ou impair. Lorsque n est pair $U_n = 1$ et lorsque n est impair, $U_n = -1$. Ainsi (U_n) n'admet pas de limite.

11. Réponse A.

La suite (U_n) est arithmétique et est donc définie par $U_n = U_0 + nr$ où r est la raison et U_0 le premier terme. Vous obtenez le système d'inconnus la raison r et le premier terme U_0 : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_8 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_0 + 8r = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_0 = 2 \\ 2 + 8r = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_0 = 2 \\ 8r = 10 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_0 = 2 \\ 8r = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_0 = 2 \\ r = 1 \end{cases}$

Et finalement $U_n = 2 + n$

12. Réponse B.

La suite (V_n) est géométrique et est donc définie par $V_n = V_0 \times q^n$ où q est la raison et V_0 le premier terme. Vous obtenez le système d'inconnus la raison q et le premier terme V_0 :

$$\begin{cases} V_0 = 4 \\ V_{10} = \dfrac{1}{256} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_0 = 4 \\ V_0 \times q^{10} = \dfrac{1}{256} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_0 = 4 \\ 4 \times q^{10} = \dfrac{1}{256} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_0 = 4 \\ q^{10} = \dfrac{1}{4 \times 256} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_0 = 4 \\ q^{10} = \dfrac{1}{1\,024} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_0 = 4 \\ q = \left(\dfrac{1}{1\,024}\right)^{\frac{1}{10}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_0 = 4 \\ q = \left(\dfrac{1}{2^{10}}\right)^{\frac{1}{10}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_0 = 4 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Et finalement $V_n = 4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

À retenir : Apprenez les puissances de deux jusqu'à 10, cela peut s'avérer utile dans certains calculs :

$2^0 = 1$	$2^6 = 64$
$2^1 = 2$	$2^7 = 128$
$2^2 = 4$	$2^8 = 256$
$2^3 = 8$	$2^9 = 512$
$2^4 = 16$	$2^{10} = 1\,024$
$2^5 = 32$	$2^{11} = 2\,048$

Chapitre 10

TRIGONOMÉTRIE

Je fais le point sur mes connaissances

✓ Les fonctions circulaires (voir chapitre 7)

✓ Les équations trigonométriques

- $\cos(x) = \cos(\theta) \Leftrightarrow x = \theta\ [2\pi]$ où $x = -\theta\ [2\pi]$
- $\sin(x) = \sin(\theta) \Leftrightarrow x = \theta\ [2\pi]$ où $x = \pi - \theta\ [2\pi]$

✓ Les principales formules à connaître

Formules d'addition

- $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$
- $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$
- $\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$
- $\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}, x, y, x + y \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi]$
- $\tan(x-y) = \dfrac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}, x, y, x - y \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi]$

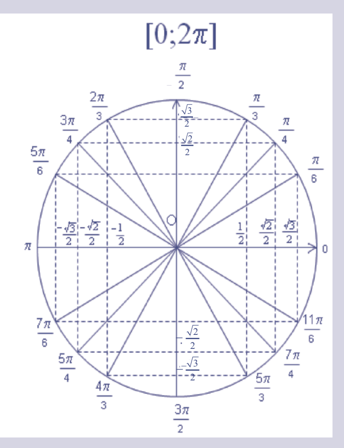
À retenir

- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
- $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
- $\cos(x - \pi) = -\cos(x)$
- $\sin(x - \pi) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
- $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$
- $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$
- $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$

✓ Cercle trigonométrique

Mesures principales

$[-\pi; \pi]$



ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1 Fonctions circulaires et formules trigonométriques

Pour chaque item, sélectionnez la ou les bonne(s) réponse(s).

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos^2(x)\sin(x)$

❒ **A.** $f(x) = \sin(x)$

❒ **B.** $f(x) = \sin(x) - \sin^3(x)$

❒ **C.** $f(x) = 1 - \sin^3(x)$

❒ **D.** f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

❒ **E.** $f'(x) = 2\cos(x)\sin(x)$

2. Après linéarisation de $f(x) = \cos^3(x)$, vous obtenez :

❒ **A.** $f(x) = \sin(x)\cos^2(x)$

❒ **B.** $f(x) = 1 - \sin^3(x)$

❒ **C.** $f(x) = \cos(2x) + \cos(x)$

❒ **D.** $f(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

3. Après linéarisation de $f(x) = \sin^3(x)$, vous obtenez :

❒ **A.** $f(x) = \sin^2(x)\cos(x)$

❒ **B.** $f(x) = 1 - \cos^3(x)$

❒ **C.** $f(x) = \sin(2x) + \sin(x)$

❒ **D.** $f(x) = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$

❒ **A.** $f(x) = \tan(x)$

❒ **B.** $f(x) = \cos(x)\sin^2(x)$

❒ **C.** $f(x) = \cos(x)[1 + \sin^2(x)]$

❒ **D.** f est monotone sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$

❒ **E.** $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{\cos(x)}$

5. $\cos(2x - \frac{\pi}{2}) = ?$

❒ **A.** $f(x) = \cos(2x)$

❒ **B.** $f(x) = 2\cos(x)\sin(x)$

❒ **C.** $f(x) = -2\cos(x)\sin(x)$

❒ **D.** $f(x) = -\sin(x)$

❒ **E.** $f(x) = -\sin(2x)$

Exercice 2 Mesure principale

6. La mesure principale de l'angle de mesure $\frac{10\pi}{3}$ est égale à :

❒ **A.** $\frac{10\pi}{3}$

❒ **B.** $-\frac{2\pi}{3}$

❒ **C.** $\frac{2\pi}{3}$

❒ **D.** $\frac{\pi}{3}$

❒ **E.** $-\frac{\pi}{3}$

Exercice 3 Equations trigonométriques

Pour chaque item sélectionnez la bonne réponse.

7. L'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ équivaut à :

❒ **A.** $x = \frac{\pi}{3}$ modulo 2π

❒ **B.** $x = \frac{1}{2}$ modulo 2π

❒ **C.** $x = \frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$ modulo 2π

❒ **D.** $x = \frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$ modulo 2π

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

8. L'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à :

❒ **A.** $x = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π

❒ **B.** $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = -\frac{\pi}{4}$ modulo 2π

❒ **C.** $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ modulo 2π

❒ **D.** $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$ modulo 2π

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

9. L'équation $\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à :

❒ **A.** $x = \frac{\pi}{8}$ ou $x = -\frac{\pi}{8}$ modulo π

❒ **B.** $x = \frac{\pi}{8}$ modulo π

❒ **C.** $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = -\frac{\pi}{4}$ modulo 2π

❒ **D.** $x = \frac{\pi}{2}$ modulo 4π

❒ **E.** $x = \frac{\pi}{8}$ ou $x = -\frac{\pi}{8}$ modulo 2π

10. L'équation $\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à :

❒ **A.** $x = \frac{\pi}{8}$ ou $x = \frac{3\pi}{8}$ modulo π

❒ **B.** $x = \frac{\pi}{8}$ modulo π

❒ **C.** $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$ modulo 2π

❒ **D.** $x = \frac{\pi}{2}$ modulo 4π

❒ **E.** $x = \frac{\pi}{8}$ ou $x = \frac{7\pi}{8}$ modulo π

CORRIGÉS

1. Réponse B.

$f(x) = \cos^2(x)\sin(x) = (1 - \sin^2(x))\sin(x) = \sin(x) - \sin^3(x)$

En calculant la dérivée, vous obtenez :

$f'(x) = -2\sin(x)\cos(x)\sin(x) + \cos^2(x)\cos(x) = -2\sin^2(x)\cos(x) + \cos^3(x)$

$f'(x) = \cos(x)[\cos^2(x) - 2\sin^2(x)] = \cos(x)[\cos^2(x) - 2(1 - \cos^2(x))]$

$f'(x) = \cos(x)[\cos^2(x) - 2 + 2\cos^2(x)] = \cos(x) \times (3\cos^2(x) - 2)$

Remarque (concernant la proposition d) : On a $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc f n'est pas strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Réponse D.

$$f(x)=\cos^3(x)=\cos^2(x)\cos(x)=\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)\cos(x) = \frac{1}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\cos(2x)\cos(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(3x)+\cos(x)}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos(x)+\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{1}{4}\cos(x)$$

$$= \frac{3}{4}\cos(x)+\frac{1}{4}\cos(3x)$$

Remarque : En additionnant les deux relations :

$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$

vous obtenez : $2\cos(x)\cos(y) = \cos(x + y) + \cos(x - y)$ et donc :

$$\frac{1}{2}\cos(2x)\cos(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(2x+x)+\cos(2x-x)}{2}\right) = \frac{1}{4}(\cos(3x)+\cos(x))$$

3. Réponse D.

$$f(x) = \sin^3(x) = \sin^2(x)\sin(x) = \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\sin(x) = \frac{1}{2}\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(2x)\sin(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(x)-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(3x)-\sin(x)}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin(x)-\frac{1}{4}\sin(3x)+\frac{1}{4}\sin(x)$$

$$= \frac{3}{4}\sin(x)-\frac{1}{4}\sin(3x)$$

Remarque : En additionnant les deux relations :

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$
$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$

Vous obtenez : $2\sin(x)\cos(y) = \sin(x+y) + \sin(x-y)$ et donc :

$$\frac{1}{2}\sin(x)\cos(2x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x+2x)+\sin(x-2x)}{2}\right) = \frac{1}{4}(\sin(3x)-\sin(x))$$

4. Réponses D. et E.

$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \times \frac{1}{\cos(x)} = \frac{\tan(x)}{\cos(x)}$ donc **A**, **B** et **C** sont fausses et **E** est vraie.

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\times\cos^2(x) - \sin(x)\times 2\times(-\sin(x))\times\cos(x)}{\cos^4(x)} = \frac{\cos^3(x)+2\cos(x)\sin^2(x)}{\cos^4(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x)+2\sin^2(x)}{\cos^3(x)} = \frac{1+\sin^2(x)}{\cos^3(x)}$$

Sur $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$, $f'(x)$ est strictement positive. En effet : $\cos(x) > 0$ pour $x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$, donc $\cos^3(x) > 0$ sur ce même intervalle en élevant au cube.
De plus $1 + \sin^2(x) > 0$ pour tout x réel.
$f'(x) > 0$ pour tout x de $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$ donc f est bien strictement croissante sur ce même intervalle et est donc monotone. Et **D** est vraie.

Rappel : f monotone signifie f strictement croissante ou f strictement décroissante.

5. Réponse B.

$\cos(2x - \frac{\pi}{2}) = \cos(2x)\cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(2x)\sin(\frac{\pi}{2})$ en appliquant la formule de $\cos(x-y)$

$\cos(2x - \frac{\pi}{2}) = \cos(2x) \times 0 + \sin(2x) \times 1 = \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$

6. Réponse B.

$\frac{10\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 4\pi - \frac{2\pi}{3} = 0 - \frac{2\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} \in [-\pi\ ;\ \pi]$ donc $-\frac{2\pi}{3}$ est la mesure principale de $\frac{10\pi}{3}$.

7. Réponse D.

$\cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$ modulo 2π

8. Réponse D.

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ modulo } 2\pi$$

9. Réponse A.

$$\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } 2x = -\frac{\pi}{4} \text{ modulo } 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{8} \text{ modulo } \pi$$

Attention : N'oubliez pas de diviser aussi le « modulo » par 2 : $[2\pi]$ devient $[\pi]$

10. Réponse A.

$$\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } 2x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ modulo } 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{8} \text{ modulo } \pi$$

Attention : N'oubliez pas de diviser aussi le « modulo » par 2 : $[2\pi]$ devient $[\pi]$

Chapitre 11

LES NOMBRES COMPLEXES

Je fais le point sur mes connaissances

✓ Principales notions

	Formule	Figure
Nombre complexe	$z = a + ib$	
Partie réelle	$\mathfrak{Re}(z) = a$	
Partie imaginaire	$\mathfrak{Im}(z) = b$	
Conjugué	$\overline{z} = a - ib$	
Module	$\vert z \vert = \sqrt{a^2 + b^2}$	
Argument	$\begin{cases} \theta = \arccos\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ \theta = \arcsin\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \end{cases}$	
Formules d'Euler	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ $\quad \sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	
Formule de De Moivre	$(\cos(x) + i \times \sin(x))^n = \cos(nx) + i \times \sin(nx)$	

✓ Les trois écritures d'un nombre complexe

Écriture algébrique	Écriture trigonométrique	Écriture exponentielle
$z = a + ib$	$z = \vert z \vert \times (\cos(\theta) + i \times \sin(\theta))$	$z = \vert z \vert \times e^{i\theta}$

✓ Racines complexes d'un polynôme de degré 2

Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ d'un polynôme de la forme $ax^2 + bx + c$ est strictement négatif, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

✓ Complexes et géométrie

Notions	Interprétation géométrique
Module de $z = a + ib$	$\lvert z \rvert = \sqrt{a^2 + b^2} = \lVert \overrightarrow{OM} \rVert = OM$
Argument de $z = a + ib$	$\arg(z) = (\vec{i}; \overrightarrow{OM})$
z imaginaire pur : $z = ib$	$\arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$
z réel : $z = a$	$\arg(z) = 0[\pi]$
Affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$	$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
Norme $\lVert \overrightarrow{AB} \rVert$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$	$\lvert z_{\overrightarrow{AB}} \rvert = \lvert z_B - z_A \rvert$
Angle orienté	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

✓ Lieux géométriques

Définition	Ensemble	Figure
$\lvert z - z_A \rvert = a,\ a \in \mathbb{R}^+$	Cercle de centre A et de rayon a	M a A (z_A)
$\lvert z - z_A \rvert = \lvert z - z_B \rvert \Leftrightarrow AM = BM$	Médiatrice du segment [AB]	A (z_A) B (z_B)

Définition	Ensemble	Figure
$\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z - z_A}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi]$	Droite perpendiculaire à (AB) passant par A	(Δ) A (z_A) B (z_B)
$\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi]$	Cercle de diamètre [AB]	M (z) A (z_A) B (z_B) Hypoténuse

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1 Module et argument d'un nombre complexe

1. Le module du nombre complexe défini par $z = 3 + 4i$ est égal à :

❒ **A.** 5 ❒ **C.** 3 ❒ **E.** 1

❒ **B.** 4 ❒ **D.** 2

2. Le module du nombre complexe défini par $z = \dfrac{3i+5}{1+2i}$ est égal à :

❒ **A.** $\dfrac{11}{5}$ ❒ **C.** $\dfrac{7}{5}$ ❒ **E.** $\dfrac{11}{25}$

❒ **B.** $\dfrac{\sqrt{170}}{5}$ ❒ **D.** $\dfrac{\sqrt{170}}{25}$

3. Un argument modulo 2π du nombre complexe $z = 1$ est :

❒ **A.** 0 ❒ **C.** $-\pi$ ❒ **E.** $\dfrac{\pi}{2}$

❒ **B.** π ❒ **D.** 1

4. Un argument modulo 2π du nombre complexe $z = -3$ est :

❒ **A.** 0 ❒ **C.** $0{,}5 \times \pi$ ❒ **E.** $-\dfrac{\pi}{2}$

❒ **B.** π ❒ **D.** 1

5. Un argument modulo 2π du nombre complexe $z = 5i$ est :

❒ **A.** 0 ❒ **C.** $\dfrac{\pi}{2}$ ❒ **E.** $-\pi$

❒ **B.** $\dfrac{\pi}{3}$ ❒ **D.** π

Exercice 2 Écritures d'un nombre complexe

6. L'écriture algébrique de $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ est :

❒ **A.** $z = \sqrt{3} + i$

❒ **B.** $z = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i \times \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

❒ **C.** $z = 2\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i \times \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

❒ **D.** $z = 1 + i\sqrt{3}$

❒ **E.** $z = \sqrt{3} - i$

7. L'écriture trigonométrique de $z = \sqrt{3} + \text{i}$ est :

❒ **A.** $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \text{i} \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

❒ **B.** $z = 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \text{i} \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

❒ **C.** $z = 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \text{i} \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

❒ **D.** $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \text{i} \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

8. L'écriture exponentielle de $z = \sqrt{2} + \text{i}\sqrt{2}$ est :

❒ **A.** $z = e^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$

❒ **B.** $z = 2e^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$

❒ **C.** $z = 2e^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$

❒ **D.** $z = 4e^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$

❒ **E.** $z = z = \sqrt{2}e^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$

9. L'écriture trigonométrique de $z = 1 - \text{i}$ est :

❒ **A.** $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{i} \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

❒ **B.** $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \text{i} \times \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

❒ **C.** $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \text{i} \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

❒ **D.** $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \text{i} \times \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

10. L'écriture trigonométrique de $z = \text{i}$ est :

❒ **A.** $z = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{i} \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

❒ **B.** $z = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{i} \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

❒ **C.** $z = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{i} \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

❒ **D.** $z = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \text{i} \times \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

Exercice 3 Nombres complexes et géométrie

Pour chaque item, sélectionnez la ou les bonne(s) réponse(s).

11. Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 + 3i$ et $z_B = 2 + 2i$. Alors la distance AB est égale à :

❒ **A.** $\sqrt{2}$ ❒ **C.** 2 ❒ **E.** 4

❒ **B.** 1 ❒ **D.** $\sqrt{3}$

12. Soient $A(z_A = 1 + i)$ et $B(z_B = 2 + i)$ et $C(z_C = 2 + 4i)$, alors :

❒ **A.** (AB) et (AC) sont parallèles

❒ **B.** (AB) et (BC) sont perpendiculaires

❒ **C.** AB = AC

❒ **D.** A est le milieu de [BC]

❒ **E.** AB = BC

Exercice 4 Lieux géométriques

13. Quel est l'ensemble des points M vérifiant $|z| = 3$?

❒ **A.** Cercle de centre $O(z_0 = 0)$ et de rayon 3

❒ **B.** Cercle de centre $A(z_A = 3)$ et de rayon 3

❒ **C.** Cercle de centre $O(z_0 = 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$

❒ **D.** Cercle de centre $O(z_0 = 0)$ et de rayon 9

❒ **E.** Cercle de centre $A(z_A = 3)$ et de rayon $\sqrt{3}$

14. Soient A d'affixe $z_A = 1 - 3i$ et B d'affixe $z_B = 2 + 2i$.
Quel est l'ensemble des points M vérifiant $|z - 1 + 3i| = |z - 2 - 2i|$?

❒ **A.** Milieu du segment [AB]

❒ **B.** Médiatrice du segment [AB]

❒ **C.** Perpendiculaire à (AB) passant par A

❒ **D.** Parallèle à (AB) passant par le milieu de [AB]

❒ **E.** Cercle de centre le milieu de [AB] et de rayon AB

15. Quel est l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$?

❒ **A.** Cercle de diamètre [AB]

❒ **B.** Médiatrice du segment [AB]

❒ **C.** Perpendiculaire à (AB) passant par A

❒ **D.** Parallèle à (AB) passant par le milieu de [AB]

❒ **E.** Parallèle à (AB) passant par A

16. Soient A et B d'affixes respectives $z_A = 4 + 5i$ et $z_B = 1 + i$.

Quel est l'ensemble des points M vérifiant $\arg\left(\dfrac{z-(1+i)}{z-(4+5i)}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$?

❒ **A.** Cercle de rayon [AB]

❒ **B.** Médiatrice du segment [AB]

❒ **C.** Perpendiculaire à (AB) passant par A

❒ **D.** Cercle de centre I d'affixe $\dfrac{5}{2} + 3i$ et de rayon $\dfrac{5}{2}$

❒ **E.** Cercle de centre I d'affixe 5 + 6i et de rayon $\sqrt{61}$

CORRIGÉS

1. Réponse A.

Le module du nombre complexe défini par $z = 3 + 4i$ est égal à :

$|z| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

2. Réponse B.

Le module du nombre complexe défini par $z = \dfrac{3i+5}{1+2i}$ est égal à :

$$|z| = \left|\frac{3i+5}{1+2i}\right| = \left|\frac{5+3i}{1+2i}\right| = \left|\frac{(5+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}\right| = \left|\frac{5-10i+3i-6i^2}{1-4i^2}\right| = \left|\frac{5-7i+6}{1+4}\right| = \left|\frac{11-7i}{5}\right|$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{11}{5}\right)^2 + \left(-\frac{7}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{121}{25}+\frac{49}{25}} = \sqrt{\frac{170}{25}} = \frac{\sqrt{170}}{5}$$

Remarque : Vous auriez pu également calculer les modules des nombres complexes 5 + 3i et 1 + 2i puis effectuer leur quotient :

$|5+3i| = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$ et $|1+2i| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$$|z| = \left|\frac{3i+5}{1+2i}\right| = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{34}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{170}}{5}$$

À retenir : $z = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

3. Réponse A.

Un argument modulo 2π du nombre complexe $z = 1$ est 0.

En effet $|z| = 1$ et donc $z = \cos(0) + i\sin(0)$. Et un argument de z est bien 0 modulo 2π.

4. Réponse B.

Un argument modulo 2π du nombre complexe $z = -3$ est π.

En effet $|z| = 3$ et donc $z = 3(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$. Et un argument de z est bien π modulo 2π.

À retenir : Lorsque z est un réel positif, alors un argument de z est égal à 0 modulo 2π

Lorsque z est un réel négatif, alors un argument de z est égal à π modulo 2π

5. Réponse C.

Un argument modulo 2π du nombre complexe $z = 5i$ est $\dfrac{\pi}{2}$.

En effet $|z| = 5$ et donc $z = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Et un argument de z est bien $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π.

À retenir : Lorsque z est un imaginaire pur de la forme z = ib où $b > 0$, un argument de z est $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π.
Lorsque z est un imaginaire pur de la forme z = i*b* où b < 0, un argument de z est $-\frac{\pi}{2}$ modulo 2π.

6. Réponse D.

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$$

L'écriture algébrique de $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ est donc $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

Remarque : La proposition **B** est l'écriture trigonométrique du nombre *z* et non son écriture algébrique.

7. Réponse D.

$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$z = \sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\times\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

L'écriture trigonométrique de $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ est donc $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

8. Réponse C.

$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

$$z = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

L'écriture exponentielle de $z = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ est $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

9. Réponse B.

$$|z| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$z = 1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\times\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

L'écriture trigonométrique de $z = 1 - \mathrm{i}$ est $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\times\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

10. Réponse B.

$$|z| = \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$$

$$z = \mathrm{i} = 1(0 + \mathrm{i}\times 1) = 1\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

L'écriture trigonométrique de $z = \mathrm{i}$ est $z = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

11. Réponse A.

$$\mathrm{AB} = |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}| = |2 + 2\mathrm{i} - (1 + 3\mathrm{i})| = |2 + 2\mathrm{i} - 1 - 3\mathrm{i}| = |1 - \mathrm{i}|$$

$$= \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

12. Réponse B.

Pour déterminer si les droites (AB) et (BC) sont parallèles ou perpendiculaires, vous devez calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)$:

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right) = \arg\left(\frac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}}\right) = \arg\left(\frac{2+4\mathrm{i} - (2+\mathrm{i})}{2+\mathrm{i} - (1+\mathrm{i})}\right) = \arg\left(\frac{2+4\mathrm{i}-2-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}-1-\mathrm{i}}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{3\mathrm{i}}{1}\right) = \arg(3\mathrm{i})$$

Or l'argument d'un imaginaire pur est égal à $\frac{\pi}{2}[\pi]$, donc $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ (car $3 > 0$). Vous en déduisez que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires et **A** est fausse et **B** est vraie.

De plus :

$$\mathrm{AB} = |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}| = |1| = \sqrt{1^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\mathrm{BC} = |z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B}| = |3\mathrm{i}| = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$$

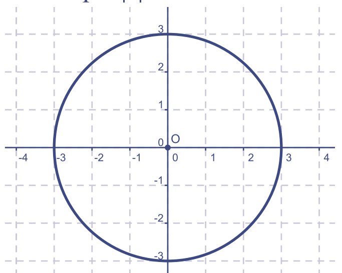
$$\mathrm{AC} = |z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}| = |1 + 3\mathrm{i}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

Donc AB ≠ AC et **C** est fausse et AB ≠ BC donc **E** est fausse

Enfin $z_\mathrm{A} \neq \frac{z_\mathrm{B} + z_\mathrm{C}}{2}$ donc A n'est pas le milieu de [BC] et **D** est fausse

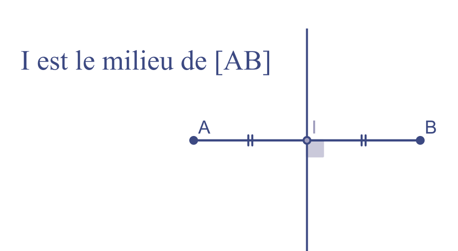
13. Réponse A.

L'ensemble des points M tels que $|z| = 3$ est le cercle de centre O et de rayon 3.



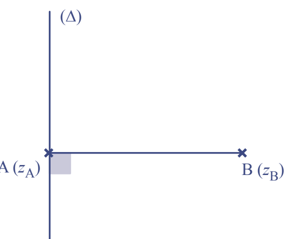
14. Réponse B.

$|z - 1 + 3i| = |z - 2 - 2i| \Leftrightarrow |z - (1 - 3i)| = |z - (2 + 2i)| \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow$ AM = BM $\Leftrightarrow$ M est équidistant de A et de B $\Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [AB]. L'ensemble des points M tels que $|z - 1 + 3i| = |z - 2 - 2i|$ est donc la médiatrice du segment [AB].



15. Réponse C.

L'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ est la perpendiculaire (Δ) à (AB) passant par A.

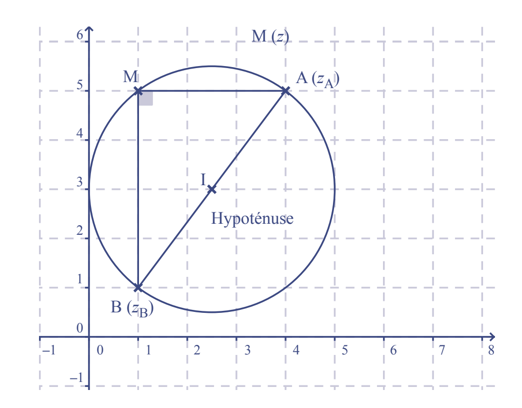


16. Réponse D.

$\arg\left(\dfrac{z-(1+i)}{z-(4+5i)}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow (AM) \perp (BM)$ et l'ensemble des points M vérifiant $\arg\left(\dfrac{z-(1+i)}{z-(4+5i)}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ est le cercle de diamètre [AB], soit le cercle de centre I (milieu de [AB]) d'affixe

$z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{4+5i+1+i}{2} = \dfrac{5+6i}{2} = \dfrac{5}{2} + 3i$ et de rayon $|z_I - z_A| =$

$\left|\dfrac{5}{2} + 3i - (4+5i)\right| = \left|-\dfrac{3}{2} - 2i\right| = \sqrt{\dfrac{9}{4} + 4} = \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2}$



Remarque : Pour déterminer le rayon, vous auriez pu également calculer le module de $|z_I - z_B|$:

$|z_I - z_B| = \left|\dfrac{5}{2} + 3i - (1+i)\right| = \left|\dfrac{3}{2} + 2i\right| = \sqrt{\dfrac{9}{4} + 4} = \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2}$

Vous auriez également pu calculer le diamètre [AB] puis le diviser par 2 :

$AB = |z_B - z_A| = |1 + i - (4 + 5i)| = |-3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Et donc le rayon est égal à $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Chapitre 12

LES PROBABILITÉS

Je fais le point sur mes connaissances

✓ **Dénombrement**

Je connais les principales formules de dénombrement :

Tirage	Avec remise	Sans remise
avec ordre	n^p	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
sans ordre	*hors programme*	$\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

✓ **Probabilités conditionnelles**

Formule du complémentaire : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Formule de l'intersection : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Formule de Poincaré : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = 0$ si A et B sont incompatibles

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont incompatibles

Formule des probabilités totales : $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ si et seulement A et B sont indépendants

Je sais définir

✓ Un anagramme

✓ Un tirage avec remise, un tirage sans remise

✓ Un tirage ordonné, un tirage non ordonné

✓ Ensemble vide $\varnothing$: $P(\varnothing) = 0$ et univers Ω : $P(\Omega) = 1$

✓ Des événements indépendants, des événements dépendants

✓ Des événements incompatibles ou disjoints

Je sais maîtriser

✓ Les formules d'intersection, de probabilités totales

✓ Traduire un énoncé sous forme de probabilités

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1 Dénombrement

1. Combien y a-t-il de manières de piocher 3 cartes avec remise dans un jeu en contenant 4 différentes ?

❒ **A.** 12 ❒ **C.** 64 ❒ **E.** 24
❒ **B.** 48 ❒ **D.** 81

2. Combien y a-t-il de manières de piocher 4 stylos successivement et sans remise dans une trousse en contenant 10 différents ?

❒ **A.** 10 ❒ **C.** 5 040 ❒ **E.** 24
❒ **B.** 720 ❒ **D.** 10 000

3. Combien y a-t-il de manières pour trois chevaux d'arriver dans un ordre précis au cours d'une course mettant en compétition 10 chevaux ?

❒ **A.** 1 000 ❒ **C.** 120 ❒ **E.** 5 040
❒ **B.** 720 ❒ **D.** 10

4. Combien y a-t-il d'anagrammes au mot INVITATION ?

❒ **A.** 3 628 800 ❒ **C.** 5 040 ❒ **E.** 1 814 400
❒ **B.** 151 200 ❒ **D.** 10

5. Combien y a-t-il d'anagrammes au mot PHYSIQUE ?

❒ **A.** 8^8 ❒ **C.** 5 040 ❒ **E.** 720
❒ **B.** 40 320 ❒ **D.** 8

Exercice 2 Probabilités conditionnelles

6. Dans une certaine classe où la moitié des élèves travaillent sérieusement, la probabilité qu'un élève soit reçu à l'examen de fin d'année est de 50 %. De plus la probabilité qu'un élève réussisse l'examen sachant qu'il a révisé est de 99 %. Quelle est la probabilité qu'un élève ait révisé sachant qu'il a obtenu son diplôme ?

❒ **A.** 0,99 ❒ **C.** 0,2475 ❒ **E.** 0,495
❒ **B.** 0,495 ❒ **D.** 0,01

7. En reprenant l'énoncé précédent, calculez la probabilité que l'élève n'ait pas révisé alors qu'il a obtenu son examen ?

❒ **A.** 0,99 ❒ **C.** 0,495 ❒ **E.** 0,05
❒ **B.** 0,5 ❒ **D.** 0,01

CORRIGÉS

1. Réponse C.

Il y a $4^3 = 64$ manières de piocher 3 cartes avec remise dans un jeu en contenant 4 différentes.

2. Réponse C.

Il y a $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$ manières de piocher 4 stylos sans remise dans une trousse en contenant 10 différents. En effet, pour le premier stylo, vous avez 10 possibilités, pour le deuxième, vous en avez $10 - 1 = 9$, pour le troisième, $9 - 1 = 8$ et pour le quatrième $8 - 1 = 7$. Soit en tout $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$ possibilités.

3. Réponse B.

Il y a $A_{10}^3 = \dfrac{10!}{(10-3)!} = \dfrac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ manières pour trois chevaux d'arriver dans un ordre précis au cours d'une course mettant en compétition 10 chevaux.

4. Réponse B.

Le mot INVITATION est composé de 10 lettres dont 3 exemplaires de la lettre I, 2 exemplaires des lettres N et T. Il a donc $\dfrac{10!}{3! \times 2! \times 2!} = \dfrac{3\,628\,800}{24} = 151\,200$ anagrammes.

5. Réponse B.

Le mot PHYSIQUE est composé de 8 lettres différentes.
Il a donc $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40\,320$ anagrammes.

Petit conseil : Apprenez vos 10 premières factorielles par cœur, cela vous permettra de gagner du temps le jour du concours !

6. Réponse A.

Soit E : « avoir son examen » et R : « avoir révisé ». En utilisant la formule de l'intersection, vous obtenez : $P_E(R) = \dfrac{P(E \cap R)}{P(E)} = \dfrac{P_R(E) \times P(R)}{P(E)} = \dfrac{0{,}99 \times 0{,}5}{0{,}5} = 0{,}99$

Remarque : La probabilité que l'élève ait révisé est de 0,5 étant donné que dans l'énoncé on vous précise que « la moitié des élèves travaillent sérieusement » ! Sachez lire entre les lignes !

7. Réponse D.

En utilisant les notations précédentes :

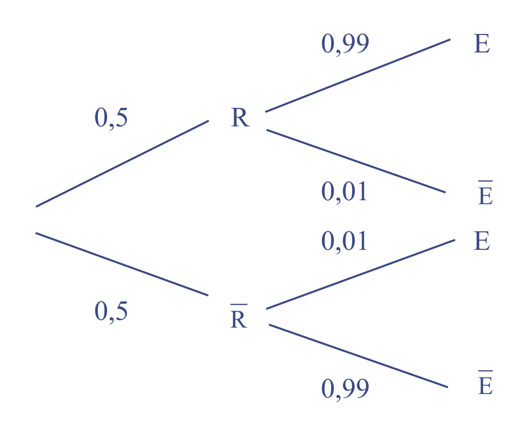
$$P_E(\overline{R}) = \frac{P(E \cap \overline{R})}{P(E)} = \frac{P_{\overline{R}}(E) \times P(\overline{R})}{P(E)} = \frac{P_{\overline{R}}(E) \times (1 - P(R))}{0,5} = \frac{P_{\overline{R}}(E) \times 0,5}{0,5} = P_{\overline{R}}(E).$$

Or $P(E) = P(E \cap R) + P(E \cap \overline{R})$ d'après la formule des probabilités totales. Soit : $P(E) = P_R(E) \times P(R) + P_{\overline{R}}(E) \times P(\overline{R})$ et en remplaçant par les différentes valeurs numériques données dans l'énoncé :

$$0,5 = 0,99 \times 0,5 + P_{\overline{R}}(E) \times 0,5 \Leftrightarrow 1 = 0,99 + P_{\overline{R}}(E)$$

$$\Leftrightarrow P_{\overline{R}}(E) = 1 - 0,99$$

$$\Leftrightarrow P_{\overline{R}}(E) = 0,01$$



Vous en déduisez finalement que : $P_E(\overline{R}) = 0,01$

Rappel : La somme des probabilités sur une même branche est toujours égale à 1.

Chapitre 13 LES LOIS DE PROBABILITÉS DISCRÈTES ET CONTINUES

Je fais le point sur mes connaissances

✓ **Distinguer les différents caractères**

Qualitatif		Quantitatif	
Nominal ex : catégorie socioprofessionnelle	Ordinal ex : 1er, 2e, petit, moyen, grand	Discret ex : nombre d'enfants par ménage	Continu ex : classe de salaires

✓ **Le calcul d'indicateurs de tendance centrale (moyenne, médiane) et de dispersion (variance)**

✓ **Les principales lois discrètes**

	$P(X=k)$	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme discrète	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli (*p*)	$\begin{cases} P(X_i=1)=p \\ P(X_i=0)=1-p \end{cases}$	p	$p(1-p)$
Binomiale (*n* ; *p*)	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson P(λ) (hors programme terminale)	$e^{-\lambda}\times\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

✓ **Les principales lois continues**

	$f(x)$	$F(x)$	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme continue sur $[a;b]$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a}, \text{ si } x\in[a;b] \\ 0, \text{ si } x\notin[a;b] \end{cases}$	$\begin{cases} 1, \text{ si } x>b \\ \frac{x-a}{b-a}, \text{ si } x\in[a;b] \\ 0, \text{ si } x<a \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$

	$f(x)$	$F(x)$	$E(X)$	$V(X)$
Exponentielle (λ)	$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, \text{ si } x \geq 0\\ 0, \text{ si } x < 0\end{cases}$	$\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, \text{ si } x \geq 0\\ 0, \text{ si } x < 0\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale N(0; 1)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \text{ si } x \in \mathbb{R}$	$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$	0	1
Normale N(m; σ)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}, \text{ si } x \in \mathbb{R}$	$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2} dx$	m	σ^2

✓ Calcul d'espérance et de variance dans un cas discret et dans un cas continu

	Cas Discret	Cas Continu
Somme des probabilités	$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
$E(X)$	$\sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
$V(X)$	$\sum_{k=0}^{+\infty} k^2P(X=k) - (E(X))^2$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2$
Médiane	Classer les valeurs par ordre croissant Si l'effectif est impair : Me = valeur du milieu Si l'effectif est pair : Me = moyenne des deux valeurs du milieu	Formule d'interpolation linéaire (hors programme terminale) Non traitée dans cet ouvrage.

✓ Propriétés de l'espérance et de la variance (cas discret et cas continu)

L'espérance est linéaire : $E(aX + b) = aE(X) + b$

Variance :

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et X variable aléatoire : $V(a) = 0$ et $V(aX + b) = a^2V(X)$

Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes :

$V(X + Y) = V(X - Y) = V(X) + V(Y)$

Si X et Y ne sont pas indépendantes

$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X\,;\,Y)$

$V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2\text{cov}(X\,;\,Y)$

✓ Probabilités avec des inégalités

- **Dans le cas discret :**

$P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$

$P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - P(X \leq a - 1)$

$P(X < a) = P(X \leq a - 1)$

$P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = P(X \leq b - 1) - P(X \leq a - 1)$

$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$

$P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a) = P(X \leq b - 1) - P(X \leq a)$

$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) = P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$

- **Dans le cas continu :**

$P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$

$P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a)$

$P(X < a) = P(X \leq a)$

$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$

ENTRAÎNEMENTS

Dans chaque exercice, sélectionnez la ou les bonne(s) réponse(s).

Exercice 1 Calcul d'indicateurs dans le cas discret

1. Dans la classe de Margot, il y a dix élèves et les notes (sur 20) au dernier contrôle de mathématiques sont les suivantes : 12 ; 1 ; 4 ; 2 ; 13 ; 15 ; 2 ; 20 ; 10 ; 19. Quelle est la note médiane ?

❒ **A.** 12 ❒ **C.** 11 ❒ **E.** 10

❒ **B.** 11,5 ❒ **D.** 9,9

2. Dans la classe de Véronique, il y a 11 élèves et les notes au dernier contrôle de physique chimie sont les suivantes : 12 ; 13 ; 0 ; 2 ; 1 ; 10 ; 2 ; 4 ; 15 ; 14 ; 15. Quelle est la note médiane ?

❒ **A.** 4 ❒ **C.** 10 ❒ **E.** 11

❒ **B.** 7 ❒ **D.** 15

3. Dans la classe de Sacha, dire qu'il y a autant de notes inférieures à 12/20 que de notes supérieures à 12/20 revient à dire que :

❒ **A.** La moyenne de la classe est 12/20

❒ **B.** La note la plus présente est 12/20

❒ **C.** La différence entre la plus haute et la plus basse note est 12/20

❒ **D.** La médiane des notes est 12/20

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

4. Soit la loi de probabilité suivante :

X	0	1	2	3	4
Probabilités	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0

❒ **A.** $E(X) = \frac{11}{12}$ ❒ **C.** $E(X) = \frac{5}{12}$ ❒ **E.** $E(X) = 0$

❒ **B.** $E(X) = \frac{1}{12}$ ❒ **D.** $E(X) = \frac{7}{12}$

5. En reprenant la distribution de la question précédente, quelle est la variance de X ?

❒ **A.** $V(X) = \frac{107}{144}$ ❒ **C.** $V(X) = \frac{107}{12}$ ❒ **E.** $V(X) = 0$

❒ **B.** $V(X) = \frac{121}{144}$ ❒ **D.** $V(X) = \frac{107}{121}$

6. En reprenant encore la même distribution, quel est l'écart-type de X ?

❒ **A.** $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{115}}{12}$ ❒ **C.** $\sigma(X) = \dfrac{11}{12}$ ❒ **E.** $\sigma(X) = 0$

❒ **B.** $\sigma(X) = \dfrac{5}{6}$ ❒ **D.** $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{107}}{12}$

Exercice 2 La loi uniforme discrète

7. Stéphane lance un dé à six faces parfaitement équilibré une fois. Il remporte en euros le numéro apparu sur la face supérieure. Quelle est l'affirmation exacte ?

❒ **A.** Le gain moyen de Stéphane est de trois euros

❒ **B.** Le gain de Stéphane peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit une loi uniforme continue

❒ **C.** Le jeu n'est pas équitable

❒ **D.** L'écart-type du gain est de $\dfrac{35}{12}$ €

❒ **E.** Aucune des réponses ne convient

Exercice 3 La loi de Bernoulli et la loi binomiale

8. Dans la classe de Pauline qui comprend 20 élèves, la probabilité qu'a chacun de réussir son examen de fin d'année est de 80 %. Quelle est l'affirmation exacte ? Vous considérerez que les résultats des élèves à l'examen sont indépendants.

❒ **A.** L'événement « au moins un élève réussit son examen de fin d'année » est presque sûr

❒ **B.** La probabilité qu'un élève exactement ait son examen est de 80 %

❒ **C.** La probabilité qu'aucun élève n'ait son examen est d'environ 0,012

❒ **D.** Il est impossible que tous les élèves aient leur examen

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

Exercice 4 La loi de Poisson (hors programme terminale)

9. Clément se rend à son école d'ingénieur en prenant un bus qui le conduit directement sur place. Sachant que le temps d'attente du bus en minutes peut être modélisé par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$, quelle est l'affirmation exacte ? On rappelle que si la variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors $E(X) = V(X) = \lambda$

❒ **A.** Clément attend en moyenne 16 minutes son bus

❒ **B.** Clément attend en moyenne son bus 240 secondes

❒ **C.** Clément attend son bus en moyenne 2 minutes

❒ **D.** La probabilité que Clément n'attende pas le bus est nulle

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

10. Quel est le paramètre d'une loi de Poisson telle que $P(X = 0) = 0{,}135$?

Indication : si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, $P(X = k) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}$ et $\ln(0,\ 135) \simeq -2$.

❒ **A.** 1 ❒ **C.** 3 ❒ **E.** 0

❒ **B.** 2 ❒ **D.** 4

Exercice 5 Une loi discrète quelconque

11. Déterminez la valeur du paramètre p pour que la distribution suivante soit bien une loi de probabilité :

X	**0**	**1**	**2**	**3**
Probabilités	0,25	0,15	0,5	p

❒ **A.** $p = 0{,}1$ ❒ **C.** $p = 0{,}3$ ❒ **E.** $p = 0{,}01$

❒ **B.** $p = 0{,}2$ ❒ **D.** $p = 0{,}5$

Exercice 6 Lois approchées

12. Alain compose un morceau de musique. La probabilité qu'il effectue une fausse note est de 10 %. Sachant que la portée sur laquelle il travaille est composée de 32 notes et que les éventuelles erreurs sont indépendantes, quelle est la réponse exacte ? $\sqrt{2{,}88} \simeq 1{,}7$

❒ **A.** Il effectue en moyenne 32 fautes

❒ **B.** Il effectue en moyenne 3 fautes

❒ **C.** Le nombre de fausses notes suit approximativement une loi Normale de moyenne $\mu = 3{,}2$ et d'écart-type environ 1,7

❒ **D.** Le nombre de fausses notes suit exactement une loi Normale de moyenne $\mu = 3{,}2$ et d'écart-type environ 1,7

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

13. Dans la classe de Mélodie, la moyenne des notes (sur 10) au dernier contrôle était de 5. Sachant que l'écart-type des notes est de 2,22, et que X est la variable aléatoire désignant la note obtenue, sélectionnez la réponse exacte :

❒ **A.** Il est possible d'approximer la loi de X par une loi de Poisson de paramètre 2,5

❒ **B.** Il est possible d'approximer la loi de X par une loi de Poisson de paramètre 5

❒ **C.** Il est possible d'approximer la loi de X par une loi Normale de paramètres 5 et 2

❒ **D.** Il n'est pas possible d'approximer la loi de X par une loi de Poisson

❒ **E.** Aucune réponse ne convient

Exercice 7 La loi exponentielle

14. Quelle est la moyenne d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 0,5 ?

❒ **A.** 0,5 ❒ **C.** 2 ❒ **E.** 4

❒ **B.** 1 ❒ **D.** 5

15. Soit X une variable suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Déterminez une valeur approchée de λ pour que $P(X \leq 3) = 0{,}5$. On donne $\ln(2) \simeq 0{,}7$.

❒ **A.** 0,23 ❒ **C.** 0,5 ❒ **E.** 0,54

❒ **B.** 0,76 ❒ **D.** 0,25

Exercice 8 Calcul d'indicateurs dans un cas continu

Soit la distribution définie par :

X	[0 ; 2]	[2 ; 4]	[4 ; 6]
Probabilités	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

16. Que vaut l'espérance de X ?

❒ **A.** $E(X) = \frac{11}{12}$ ❒ **C.** $E(X) = \frac{5}{2}$ ❒ **E.** $E(X) = \frac{5}{4}$

❒ **B.** $E(X) = \frac{1}{2}$ ❒ **D.** $E(X) = \frac{3}{2}$

17. En reprenant la distribution précédente, que vaut la variance de X ?

❒ **A.** $V(X) = \frac{1}{2}$ ❒ **C.** $V(X) = \frac{11}{4}$ ❒ **E.** $V(X) = 9$

❒ **B.** $V(X) = \frac{11}{2}$ ❒ **D.** $V(X) = \frac{15}{2}$

18. En reprenant encore la distribution de la question 16, calculer l'écart-type de X :

❒ **A.** $\sigma(X) = \frac{\sqrt{11}}{2}$ ❒ **D.** $\sigma(X) = \frac{\sqrt{15}}{2}$

❒ **B.** $\sigma(X) = \frac{\sqrt{11}}{4}$ ❒ **E.** $\sigma(X) = 3$

❒ **C.** $\sigma(X) = \frac{\sqrt{5}}{2}$

19. Soit la fonction de densité $f(x) = \begin{cases} 3x^2, \text{si } x \in [0;1] \\ 0, \text{si } x \notin [0;1] \end{cases}$, l'espérance de X vaut :

❐ **A.** $E(X) = \frac{1}{2}$ ❐ **C.** $E(X) = \frac{1}{4}$ ❐ **E.** $E(X) = 1$

❐ **B.** $E(X) = \frac{1}{3}$ ❐ **D.** $E(X) = \frac{3}{4}$

20. En reprenant la question précédente, la variance de X est égale à :

❐ **A.** $V(X) = \frac{3}{20}$ ❐ **C.** $V(X) = \frac{11}{20}$ ❐ **E.** $V(X) = \frac{3}{5}$

❐ **B.** $V(X) = \frac{3}{80}$ ❐ **D.** $V(X) = \frac{9}{20}$

21. En reprenant encore la distribution précédente, que vaut l'écart-type de X ?

❐ **A.** $\sigma(X) = \frac{9}{16}$ ❐ **C.** $\sigma(X) = \frac{\sqrt{15}}{20}$ ❐ **E.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$

❐ **B.** $\sigma(X) = \frac{\sqrt{3}}{20}$ ❐ **D.** $\sigma(X) = \frac{3}{4}$

Exercice 9 Lois continues quelconques

22. Pourquoi pouvez-vous affirmer que f (fonction définie à la question 19) est bien une densité de probabilité ? On admet de plus que f est continue presque partout et que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.

❐ **A.** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ ❐ **D.** f n'est pas monotone

❐ **B.** Elle est définie sur [0,1] ❐ **E.** Aucune réponse ne convient

❐ **C.** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$

23. Déterminer k tel que la fonction suivante soit bien une densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} k(x-1), \text{ si } x \in [1;2] \\ 0, \text{ si } x \notin [1;2] \end{cases}$$

❐ **A.** $k = 0$ ❐ **C.** $k = 2$ ❐ **E.** $k = 4$

❐ **B.** $k = 1$ ❐ **D.** $k = 3$

Exercice 10 La loi Normale et lecture dans la table

Soient Z la variable aléatoire continue de loi $N(0\,;\,1)$ et X la variable aléatoire continue de loi Normale $N(5\,;\,2)$. En utilisant la table (celle de votre cours) d'une loi Normale centrée réduite, répondez aux questions suivantes :

24. $P(Z < 2) = ?$

- ❒ **A.** 0,9772
- ❒ **B.** 0,9332
- ❒ **C.** 0,0668
- ❒ **D.** 0,0228
- ❒ **E.** 0,5

25. $P(X < 10) = ?$

- ❒ **A.** 0,0062
- ❒ **B.** 0,9938
- ❒ **C.** 0,4969
- ❒ **D.** 1
- ❒ **E.** 0,5

26. $P(X > 5) = ?$

- ❒ **A.** 0
- ❒ **B.** 0,25
- ❒ **C.** 0,5
- ❒ **D.** 0,9772
- ❒ **E.** 0,8413

27. $P(X < 0) = ?$

- ❒ **A.** 0,0062
- ❒ **B.** 0,9938
- ❒ **C.** 0,4969
- ❒ **D.** 0
- ❒ **E.** 0,5

28. $P(X > 3) = ?$

- ❒ **A.** 0,1587
- ❒ **B.** 0,8413
- ❒ **C.** 0,9772
- ❒ **D.** 0,9778
- ❒ **E.** 0,0062

29. $P(3 < X < 7) = ?$

- ❒ **A.** 0,1587
- ❒ **B.** 0,3174
- ❒ **C.** 0,6826
- ❒ **D.** 0,8413
- ❒ **E.** 0,5

30. Déterminez le réel α tel que $P(X < \alpha) = 0{,}975$

- ❒ **A.** $\alpha = 0{,}95$
- ❒ **B.** $\alpha = 0{,}975$
- ❒ **C.** $\alpha = 6{,}95$
- ❒ **D.** $\alpha = 8{,}92$
- ❒ **E.** $\alpha = 1{,}96$

CORRIGÉS

MATHS

1. Réponse C.

Vous devez tout d'abord classer les notes par ordre croissant :

1 ; 2 ; 2 ; 4 ; 10 ; 12 ; 13 ; 15 ; 19 ; 20.

L'effectif des notes est pair donc la médiane est la moyenne entre les deux notes du milieu, soit $Me = \frac{10+12}{2} = \frac{22}{2} = 11$

Remarque : Cela signifie qu'il y a autant de notes inférieures à 11 que de notes supérieures à 11.

2. Réponse C.

Vous devez tout d'abord classer les notes par ordre croissant :

0 ; 1 ; 2 ; 2 ; 4 ; 10 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 15.

L'effectif des notes est impair donc la médiane est la note du milieu, soit $Me = 10$.

Remarque : Cela signifie qu'il y a autant de notes inférieures à 10 que de notes supérieures à 10.

3. Réponse D.

Dire qu'il y a autant de notes inférieures à 12/20 que de notes supérieures à 12/20 revient à affirmer que la médiane des notes de la classe est égale à 12/20.

4. Réponse A.

$$E(X) = 0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{12}+3\times\frac{1}{12}+4\times 0=\frac{6+2+3}{12}=\frac{11}{12}$$

5. Réponse A.

$$V(X) = 0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{12}+3^2\times\frac{1}{12}+4^2\times 0-\left(E(X)\right)^2$$

$$V(X) = \frac{6+4+9}{12}-\left(\frac{11}{12}\right)^2=\frac{19}{12}-\frac{121}{144}=\frac{228-121}{144}=\frac{107}{144}$$

6. Réponse D.

L'écart-type est égal à la racine carrée de la variance, soit $\sigma(X)=\sqrt{\frac{107}{144}}=\frac{\sqrt{107}}{12}$

À retenir : Étant donné que l'écart-type est égal à la racine carrée de la variance, cette dernière doit toujours être positive ou nulle. Si ce n'est pas le cas, c'est que vous vous êtes trompé(e) ! Voilà un bon moyen de vérifier vos résultats !

7. Réponse C.

Le gain G de Stéphane peut être modélisé par une variable aléatoire G dont la loi est une loi uniforme discrète (que des nombres entiers !) et non continue. Sa loi est définie par :

G	1	2	3	4	5	6
Probabilités	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(\text{G}) = 1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\times(1+2+3+4+5+6)$$

$$=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}\text{ €. Le gain moyen est donc égal à 3,50 €.}$$

$$V(\text{G}) = 1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$V(\text{G})=\frac{1}{6}\times(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)-\frac{49}{4}=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{182}{12}-\frac{147}{12}=\frac{35}{12}\text{ €}^2$$

$$\sigma(\text{G})=\sqrt{\frac{35}{12}}\text{ €. L'écart-type n'est donc pas égal à }\frac{35}{12}\text{ €}$$

L'espérance du gain ou le gain moyen est égal à 3,50 € qui est strictement positif, ainsi le jeu est favorable au joueur. Il n'est donc pas équitable. Ainsi seule **C** est vraie.

8. Réponse A.

Le nombre d'élèves réussissant l'examen de fin d'année peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit une loi Binomiale de paramètres 20 et 0,8. En effet, vous devez considérer la variable aléatoire X_i de Bernoulli définie par : $X_i = 1$ si l'élève i a son examen et $X_i = 0$ sinon. Les X_i sont indépendants, donc X qui est la répétition de 20 épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre 0,8 suit une loi Binomiale de paramètres 20 et 0,8.

$$X=\sum_{i=1}^{20}X_i \sim B(20;0,8),\ E(X)=20\times 0,8=16 \text{ et } V(X)=20\times 0,8\times(1-0,8)=3,2$$

$$P(X=k)=\binom{20}{k}(0,8)^k(1-0,8)^{20-k}=\binom{20}{k}(0,8)^k(0,2)^{20-k}$$

La probabilité qu'au moins un élève réussisse son examen est donnée par :

$$P(X\geq 1)=1-\text{P}(X=0)=1-\binom{20}{0}(0,8)^0(1-0,8)^{20-0}=1-1\times 1\times(0,2)^{20}$$

$$=1-(0,2)^{20}\approx 1-0=1$$

Cet événement est donc presque sûr car sa probabilité est très proche de 1. Ainsi **A** est vraie.

$$P(X=1)=\binom{20}{1}(0,8)^1(1-0,8)^{20-1}=20\times 0,8\times (0,2)^{19}=16\times (0,2)^{19}\approx 0$$

La probabilité qu'un élève exactement ait son examen est donc de 0 et non de 80 %. Ainsi **B** est fausse.

$$P(X=0)=\binom{20}{0}(0,8)^0(1-0,8)^{20-0}=1\times 1\times (0,2)^{20}=(0,2)^{20}\approx 0$$

La probabilité qu'aucun élève ait son examen n'est pas égale à 0,012. Ainsi **C** est fausse.

$$P(X=20)=\binom{20}{20}(0,8)^{20}(1-0,8)^{20-20}=1\times (0,8)^{20}\times 1=(0,8)^{20}\approx 0,012$$

La probabilité que tous les élèves aient leur examen est $P(X=20)\approx 0,012\neq 0$ donc cet événement n'est pas impossible et **D** est fausse.

À retenir : Un événement impossible a une probabilité nulle.
Un événement certain a une probabilité égale à 1.

9. Réponse B.

Le temps d'attente X du bus en minutes peut être modélisé par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$, ainsi X suit la loi de Poisson (4). $E(X) = 4$ minutes $= 4 \times 60 = 240$ secondes. Soyez attentif aux unités ! Ainsi **B** est vraie et **A** et **C** sont fausses.

La probabilité que Clément n'attende pas son bus est égale à la probabilité que son temps d'attente soit nul, soit $P(X=0) = \mathrm{e}^{-4} \times \frac{4^0}{0!} = \mathrm{e}^{-4} \approx 0,018 \neq 0$ donc cet événement n'est pas impossible (car sa probabilité n'est pas nulle) et **D** est fausse.

10. Réponse B.

Si X suit une loi de Poisson, alors $P(X = 0) = 0,135 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda}\times\frac{\lambda^0}{0!} = 0,135$ $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda} = 0,135 \Leftrightarrow -\lambda = \ln(0,135) \Leftrightarrow \lambda = -\ln(0,135) \approx 2$.

11. Réponse A.

Pour que la distribution soit une loi de probabilité, il faut que la somme de toutes les probabilités soit égale à 1, soit $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$, ainsi avec les valeurs des différentes probabilités, vous obtenez : $0,25 + 0,15 + 0,5 + p = 1$, soit $0,9 + p = 1$ et finalement $p = 1 - 0,9 = 0,1$.

Remarque : Vous devez également vérifier que toutes les probabilités sont aussi bien comprises entre 0 et 1. Ce qui est bien le cas !

12. Réponse C.

Vous devez considérer la variable aléatoire de Bernoulli X_i qui prend la valeur 1 si Alain fait une fausse note et la valeur 0 sinon. Ainsi le nombre X de fausses notes (X_i indépendants) suit une loi binomiale de paramètres 32 et 0,1. Par ailleurs, comme $n = 32$ est grand ($n > 30$), vous pouvez approximer la loi de X par une loi Normale de paramètres $\mu = E(X)$ et $\sigma =$ écart-type de X. Or $E(X) = 32 \times 0,1 = 3,2$ et $\sigma(X) = \sqrt{32 \times 0,1 \times 0,9} = \sqrt{2,88} \approx 1,7$ Donc X suit approximativement la loi Normale de paramètres 3,2 et 1,7. Mais la loi exacte de X est la loi Binomiale de paramètres 32 et 0,1. Donc **C** est vraie et **D** et **E** sont fausses.

Il effectue en moyenne $32 \times 0,1 = 3,2$ fautes donc **A** et **B** sont fausses.

Attention !

Ne confondez pas loi exacte et loi approximative !

13. Réponse B.

À partir des données de l'énoncé, vous pouvez affirmer que la moyenne des notes est égale à $E(X) = 5$ et l'écart-type est égal à 2,22, ainsi la variance est égale à $V(X) = 2,22^2 \approx 4,92 \approx 5$. Vous obtenez une variance très proche de la moyenne, vous pouvez donc approximer la loi de X par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$. Ainsi seule la proposition **B** est vraie.

À retenir : Lorsque X suit une loi de Poisson de paramètre λ, $E(X) = V(X) = \lambda$.

14. Réponse C.

X suit la loi Exponentielle de paramètre 0,5, ainsi $E(X) = \dfrac{1}{0,5} = 2$

15. Réponse A.

$P(X \leq 3) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-3\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-3\lambda} = 1 - 0,5 \Leftrightarrow e^{-3\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow -3\lambda$

$$= \ln(0,5) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,5)}{3} = \frac{\ln(2)}{3} \approx \frac{0,7}{3} \simeq 0,23$$

Le paramètre de la loi exponentielle est donc $\lambda \approx 0,23$.

Remarque : $P(X \leq x) = 0,5$ signifie que x est la médiane.

16. Réponse C.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} + 5 \times \frac{1}{4} = \frac{2+3+5}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Attention : Pour calculer l'espérance ou la moyenne de X, vous devez utiliser le centre de chaque classe que vous multipliez par la probabilité de la classe considérée.

Rappel : Pour obtenir le centre c d'une classe $[a\ ;\ b]$, vous devez effectuer le calcul suivant : $c = \dfrac{a+b}{2}$

17. Réponse C.

$$V(X) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 5^2 \times \frac{1}{4} - (E(X))^2 = \frac{2+9+25}{4} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{36}{4} - \frac{25}{4} = \frac{11}{4}$$

Attention : Pour calculer la variance de *X*, vous devez utiliser le centre de chaque classe que vous élevez au carré et multipliez par la probabilité de la classe considérée.
N'oubliez pas de soustraire le carré de l'espérance !

18. Réponse A.

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

19. Réponse D.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 3x^3 dx = 3 \times \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = 3 \times \left(\frac{1}{4} \times 1^4 - \frac{1}{4} \times 0^4\right) = \frac{3}{4}$$

20. Réponse B.

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2 = \int_0^1 3x^4 dx = 3 \times \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{3}{5} \times 1^5 - \frac{3}{5} \times 0^5 - \frac{9}{16} = \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80}$$

Attention : N'oubliez pas de retrancher le terme « $(E(X))^2$ » lorsque vous calculez la variance !

21. Réponse C.

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{3}{80}} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{20}$$

22. Réponse A.

f est bien une densité de probabilité car $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, en effet :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 3x^2 dx = 3 \times \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 3 \times \left(\frac{1}{3} \times 1^3 - \frac{1}{3} \times 0^3\right) = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

23. Réponse C.

f est une densité de probabilité si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^2 k(x-1)dx = 1 \Leftrightarrow \left[k\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\right]_1^2 = 1 \Leftrightarrow k\left(\frac{2^2}{2} - 2 - \left(\frac{1^2}{2} - 1\right)\right) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow k\left(\frac{4}{2} - 2 - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right) = 1 \Leftrightarrow k\left(2 - 2 - \frac{1}{2} + 1\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{2} = 1 \Leftrightarrow k = 2$$

24. Réponse A.

$$P(Z < 2) = P(Z \leq 2) = 0{,}9772$$

25. Réponse B.

$$P(X < 10) = P\left(\frac{X-5}{2} < \frac{10-5}{2}\right) = P\left(Z < \frac{5}{2}\right) = P(Z < 2{,}5) = P(Z \leq 2{,}5) = 0{,}9938$$

26. Réponse C.

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - P\left(\frac{X-5}{2} \leq \frac{5-5}{2}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{0}{2}\right) = 1 - P(Z \leq 0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

27. Réponse A.

$$P(X < 0) = P\left(\frac{X-5}{2} < \frac{0-5}{2}\right) = P\left(Z < -\frac{5}{2}\right) = P(Z < -2{,}5) = P(Z \leq -2{,}5)$$

$$P(X < 0) = 1 - P(Z \leq 2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$$

28. Réponse B.

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - P\left(\frac{X-5}{2} \leq \frac{3-5}{2}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{-2}{2}\right) = 1 - P(Z < -1)$$

$$P(X > 3) = 1 - (1 - P(Z \leq 1)) = P(Z \leq 1) = 0{,}8413$$

29. Réponse C.

$$P(3 < X < 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 3) = P\left(\frac{X-5}{2} \leq \frac{7-5}{2}\right) - P\left(\frac{X-5}{2} \leq \frac{3-5}{2}\right)$$

$$P(3 < X < 7) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - (1 - P(Z \leq 1)) = 2P(Z \leq 1) - 1$$

$$P(3 < X < 7) = 2P(Z \leq 1) - 1 = 2 \times 0{,}8413 - 1 = 1{,}6826 - 1 = 0{,}6826$$

30. Réponse D.

$$P(X<\alpha) = 0{,}975 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-5}{2} < \frac{\alpha-5}{2}\right) = 0{,}975 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{\alpha-5}{2}\right) = P(Z \leq 1{,}96)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha-5}{2} = 1{,}96 \Leftrightarrow \alpha = 2 \times 1{,}96 + 5 = 8{,}92$$

Rappel : inégalités de probabilités dans un cas continu

- $P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$
  $= P(X \leq b) - P(X \leq a)$
- $P(X < a) = P(X \leq a)$
- $P(X \leq a) = 1 - P(X < a) = 1 - P(X \leq a)$
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$

Chapitre 14

L'ARITHMÉTIQUE

Je fais le point sur mes connaissances

✓ Je sais calculer le PGCD de deux nombres entiers

✓ Je sais calculer le PPCM de deux nombres entiers en utilisant la formule :
PPCM(a, b) × PGCD(a, b) = $a \times b$

✓ Je sais montrer que deux nombres sont premiers entre eux

✓ Je connais le théorème de Bézout

Je sais définir

✓ Un nombre premier (je connais en particulier les 25 premiers jusqu'à 100).

✓ Je connais les critères de divisibilité

	Critères
par 2	nombre pair
par 3	nombre dont la somme des chiffres est un multiple de 3
par 4	nombre dont les deux derniers chiffres forment un multiple de 4
par 5	nombre se terminant par 0 ou 5
par 6	nombre divisible à la fois par 2 et par 3
par 9	nombre dont la somme des chiffres est un multiple de 9
par 10	nombre se terminant par 0
par 11	nombre à 2 chiffres : chiffres identiques nombres à 3 chiffres : 1er chiffre + 3^{e} chiffre = 2^{e} chiffre, avec retenue possible

✓ Deux nombres premiers entre eux

✓ Un dividende, un diviseur, un quotient, un reste

Je sais maîtriser

✓ Les méthodes de calcul des PGCD et PPCM

✓ La division euclidienne

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1 Diviseurs d'un nombre entier et critères de divisibilité

1. Combien 1 a-t-il de diviseurs ?
❒ **A.** 1
❒ **B.** 2
❒ **C.** Aucun
❒ **D.** Une infinité
❒ **E.** Aucune réponse ne convient

2. Combien 17 a-t-il de diviseurs ?
❒ **A.** 1
❒ **B.** 2
❒ **C.** 3
❒ **D.** 4
❒ **E.** 5

3. Combien 27 a-t-il de diviseurs ?
❒ **A.** 1
❒ **B.** 2
❒ **C.** 3
❒ **D.** 4
❒ **E.** 5

4. Combien 50 a-t-il de diviseurs ?
❒ **A.** 1
❒ **B.** 2
❒ **C.** 5
❒ **D.** 6
❒ **E.** 4

5. Combien 100 a-t-il de diviseurs ?
❒ **A.** 1
❒ **B.** 8
❒ **C.** 9
❒ **D.** 10
❒ **E.** 4

6. 327 est divisible par :
❒ **A.** 3
❒ **B.** 6
❒ **C.** 9
❒ **D.** 12
❒ **E.** 27

7. 1 134 est divisible par :
❒ **A.** 17
❒ **B.** 9
❒ **C.** 5
❒ **D.** 4
❒ **E.** Aucune réponse ne convient

8. 561 est divisible par :
❒ **A.** 11
❒ **B.** 10
❒ **C.** 9
❒ **D.** 5
❒ **E.** 2

9. 567 est divisible par :
❒ **A.** 7
❒ **B.** 8
❒ **C.** 10
❒ **D.** 17
❒ **E.** Aucune réponse ne convient

10. 97 est divisible par :
❒ **A.** 9
❒ **B.** 8
❒ **C.** 1
❒ **D.** 0
❒ **E.** 17

Exercice 2 Division euclidienne

11. Que vaut le quotient de la division euclidienne de 100 par 8 ?
❒ **A.** 11
❒ **B.** 12
❒ **C.** 12,5
❒ **D.** 14
❒ **E.** 13

12. La division euclidienne de 157 par 45 a pour reste :
❒ **A.** 22
❒ **B.** 17
❒ **C.** 7
❒ **D.** 3
❒ **E.** 0

13. La division euclidienne de 1 477 par 738 a :
❒ **A.** un reste égal à 45
❒ **B.** un reste égal à 1
❒ **C.** un dividende égal à 45
❒ **D.** un quotient égal à 1 477
❒ **E.** Aucune réponse ne convient

Exercice 3 PGCD et PPCM

14. Le PGCD de 57 et de 6 est :
❒ **A.** 1
❒ **B.** 2
❒ **C.** 3
❒ **D.** 6
❒ **E.** 8

15. Le PGCD de 1 457 et de 655 est :

❒ **A.** 1
❒ **B.** 2
❒ **C.** 67
❒ **D.** 147
❒ **E.** 655

16. 1 457 et 655 sont :

❒ **A.** Des nombres premiers
❒ **B.** Premiers entre eux
❒ **C.** Divisibles par 3
❒ **D.** Sont congrus modulo 1
❒ **E.** Aucune réponse ne convient

17. Le PGCD de 2 457 et 387 est égal à :

❒ **A.** 1
❒ **B.** 2
❒ **C.** 9
❒ **D.** 18
❒ **E.** 27

18. 2 457 et 387 sont :

❒ **A.** Premiers entre eux
❒ **B.** Des nombres premiers
❒ **C.** Divisibles par 18
❒ **D.** Divisibles par 2
❒ **E.** Aucune réponse ne convient

19. Le PPCM de 57 et de 6 est :

❒ **A.** 3
❒ **B.** 6
❒ **C.** 57
❒ **D.** 114
❒ **E.** 342

20. Le PPCM de 1 457 et de 655 est :

❒ **A.** 954 335
❒ **B.** 1 457
❒ **C.** 655
❒ **D.** 1
❒ **E.** 477 167

21. Le PPCM de 2 457 et 387 est égal à :

❒ **A.** 105 651
❒ **B.** 950 859
❒ **C.** 1
❒ **D.** 9
❒ **E.** 35 217

CORRIGÉS

1. Réponse A.

1 n'a qu'un seul et unique diviseur : lui-même.

2. Réponse B.

17 est un nombre premier. Il a donc pour diviseurs lui-même et 1.

3. Réponse D.

27 a 4 diviseurs : 27, 9, 3 et 1.

4. Réponse D.

50 a 6 diviseurs : 50, 25, 10, 5, 2 et 1.

5. Réponse C.

100 a 9 diviseurs : 100, 50, 25, 20, 10, 5, 4, 2 et 1.

6. Réponse A.

327 est divisible par 3, en effet la somme de ses chiffres est un multiple de 3 : $3 + 2 + 7 = 12$ qui est un multiple de 3.

7. Réponse B.

1 134 est divisible par 9, en effet la somme de ses chiffres est un multiple de 9 : $1 + 1 + 3 + 4 = 9$.

Remarque : 1 134 est aussi divisible par 3 (car la somme de ses chiffres est égale à un multiple de 3 : $9 = 3 \times 3$) et par 6 (nombre pair divisible par 3).

8. Réponse A.

561 est divisible par 11, en effet la somme de ses premier et dernier chiffres est égale à son deuxième : $5 + 1 = 6$.

9. Réponse A.

567 est divisible par 7, en effet en testant les autres propositions, vous remarquez qu'aucune ne fonctionne. Vous remarquez aussi que $56 = 7 \times 8$, donc : $560 = 7 \times 80$ et $567 = 560 + 7 = 7 \times 80 + 7 = 7 \times (80 + 1) = 7 \times 81$.

10. Réponse C.

97 est un nombre premier : il n'est donc divisible que par lui-même et 1.

À retenir : Apprenez les nombres premiers jusqu'à 100 (il y en a 25) : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Il y a une infinité de nombres premiers dans l'ensemble des entiers naturels.

11. Réponse B.

La division euclidienne de 100 par 8 a pour quotient 12, en effet :

100	8
−96 = 4	12

100 = 8 × 12 + 4

Remarque : un peu de vocabulaire ! Le dividende est 100, le diviseur est 8, le quotient est 12 et le reste est 4.

12. Réponse A.

La division euclidienne de 157 par 45 a pour reste 22, en effet :

157	45
−135 = 22	3

157 = 45 × 3 + 22

13. Réponse B.

La division euclidienne de 1 477 par 738 a un reste égal à 1, en effet :

1 477	738
−1 476 = 1	2

1 477 = 738 × 2 + 1

14. Réponse C.

Le PGCD de 57 et de 6 est obtenu en effectuant une succession de divisions euclidiennes selon l'algorithme d'Euclide :

57 = 6 × 9 + 3

6 = 3 × 2 + 0

Donc le PGCD de 57 et de 6 est égal à 3 (avant le dernier reste nul).

15. Réponse A.

Le PGCD de 1 457 et de 655 est obtenu en effectuant une succession de divisions euclidiennes selon l'algorithme d'Euclide :

1 457 = 655 × 2 + 147

655 = 147 × 4 + 67

147 = 67 × 2 + 13

67 = 13 × 5 + 2

13 = 2 × 6 + 1

Le dernier reste étant égal à 1, le PGCD de 1 457 et de 655 est égal à 1 et les nombres 1 457 et 655 sont premiers entre eux.

16. Réponse B.

1 457 et 655 sont premiers entre eux car leur PGCD est égal à 1 (voir question précédente).

17. Réponse C.

Le PGCD de 2 457 et 387 est égal à 9, en effet :

$2\,457 = 387 \times 6 + 135$

$387 = 135 \times 2 + 117$

$135 = 117 \times 1 + 18$

$117 = 18 \times 6 + 9$

$18 = 9 \times 2 + 0$

Donc le PGCD de 2 457 et 387 est égal à 9.

18. Réponse E.

2 457 et 387 ne sont pas premiers entre eux car leur PGCD (le reste de la dernière division euclidienne) n'est pas égal à 1.

Ce ne sont pas non plus des nombres premiers car d'après la question précédente, leur PGCD est 9, ils sont donc au moins divisibles par un entier (9).

En revanche, ils ne sont pas divisibles par 18. Cela se voit immédiatement car ce ne sont pas des nombres pairs donc il est impossible qu'ils soient divisibles par 18.

Ainsi aucune réponse n'est exacte.

19. Réponse D.

Le PPCM de 57 et de 6 est 114, en effet :

En appliquant la formule $\text{PGCD}(57, 6) \times \text{PPCM}(57, 6) = 57 \times 6$, vous obtenez :

$3 \times \text{PPCM}(57, 6) = 57 \times 6 \Leftrightarrow \text{PPCM}(57, 6) = 57 \times 2 \Leftrightarrow \text{PPCM}(57, 6) = 114$.

20. Réponse A.

Le PPCM de 1 457 et de 655 est 954 335, en effet :

En appliquant la formule :

$\text{PCGD}(1\,457, 655) \times \text{PPCM}(1\,457, 655) = 1\,457 \times 655$, vous obtenez :

$1 \times \text{PPCM}(1\,457, 655) = 954\,335 \Leftrightarrow \text{PPCM}(1\,457, 655) = 954\,335$.

21. Réponse A.

Le PPCM de 2 457 et de 387 est 105 651, en effet :

En appliquant la formule :

$\text{PCGD}(2\,457, 387) \times \text{PPCM}(2\,457, 387) = 2\,457 \times 387$, vous obtenez :

$9 \times \text{PPCM}(2\,457, 387) = 950\,859 \Leftrightarrow \text{PPCM}(2\,457, 387) = \dfrac{950\,859}{9}$

$\Leftrightarrow \text{PPCM}(2\,457, 387) = 105\,651$.

PARTIE 2

Physique







Chapitre 1

RADIOACTIVITÉ

Je fais le point sur mes connaissances

- ❖ Je sais que la radioactivité est un phénomène aléatoire, inéluctable et imprévisible.
- ❖ Je connais les différentes formes de radioactivité : la radioactivité α, la radioactivité β et la radioactivité γ.
- ❖ Je sais que la radioactivité α est l'émission d'une particule α (noyau d'hélium ${}_{2}^{4}He$) accompagnée par un rayonnement électromagnétique γ.
- ❖ Je sais que la radioactivité β est l'émission d'une particule (électron ou positron (électron positif) accompagnée d'un noyau fils.
- ❖ La radioactivité γ qui est un rayonnement électromagnétique.
- ❖ Je connais la modélisation ${}_{Z}^{A}X$.
- ❖ Je connais la définition de l'isotopie.
- ❖ Je sais que la radioactivité a été découverte par H. Becquerel.
- ❖ Je sais que l'on mesure la radioactivité avec un compteur Geiger.
- ❖ Je sais ce qu'est une réaction nucléaire.
- ❖ Je sais qu'il existe deux types de réactions nucléaires : la réaction de fission nucléaire et la réaction de fusion nucléaire.

Je sais définir



- ❖ Je sais définir la radioactivité.
- ❖ Je sais définir l'activité radioactive. On la note A. C'est le nombre de désintégrations par seconde.
- ❖ Je connais l'unité de la radioactivité. C'est le Becquerel (Bq).
- ❖ Je sais définir la période radioactive. C'est la durée nécessaire pour que la moitié de la population de noyaux radioactifs se soit désintégrée. Elle est notée $T_{1/2}$ ou $\tau_{1/2}$.
- ❖ Je connais les 4 types d'interactions :
  - – interaction forte ;
  - – interaction nucléaire faible ;
  - – interaction électrique ;
  - – interaction gravitationnelle.
- ❖ Je sais me protéger de la radioactivité quelle que soit sa forme.
- ❖ Je sais définir l'énergie de liaison d'un noyau.
- ❖ Je connais les lois de Soddy : conservation des nombres A et Z.
- ❖ Je connais la relation d'Einstein $E(J) = m(kg).c^2(m.s^{-1})$.

Je sais maîtriser

- ❖ Je sais utiliser les lois de Soddy afin d'équilibrer une équation de désintégration, une équation de fission nucléaire ou une équation de fusion nucléaire.
- ❖ Je retrouve la période radioactive sur un graphique illustrant la décroissance radioactive d'un échantillon radioactif.
- ❖ Je sais calculer l'activité radioactive.
- ❖ Je sais l'appliquer dans le cadre des réactions de désintégrations, de fission nucléaire et de fusion nucléaire.
- ❖ Je sais faire la différence entre la radioactivité naturelle et la radioactivité artificielle.
- ❖ Je sais calculer l'énergie de liaison d'un noyau.
- ❖ Je sais calculer l'énergie libérée par tout type de réaction nucléaire.

ENTRAÎNEMENTS

PHYSIQUE

Exercice 1

L'uranium

L'uranium est un élément chimique de symbole U, de la famille des actinides. Il se trouve partout à l'état de traces, y compris dans l'eau de mer. C'est un métal lourd et radioactif (émetteur α) de période radioactive très longue (4,4688 milliards d'années pour l'uranium 238 et environ 703,8 millions d'années pour l'uranium 235).
L'uranium 235 : ${}_{92}^{235}U$ et l'uranium 238 : ${}_{92}^{238}U$.

a. Ces deux noyaux diffèrent par leur nombre de protons.
b. Ces deux noyaux diffèrent par leur nombre de neutrons.
c. Ces deux noyaux possèdent le même nombre de protons.
d. Ces deux noyaux possèdent le même nombre de neutrons.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 2

Les quatre interactions fondamentales

Il existe quatre types d'interactions : l'interaction forte, l'interaction faible, l'interaction électromagnétique et l'interaction gravitationnelle.

a. L'interaction électromagnétique n'agit qu'à de très courtes distances.
b. L'interaction gravitationnelle est attractive.
c. L'interaction nucléaire forte agit à des distances inférieures ou égale au nanomètre.
d. L'interaction nucléaire faible permet d'expliquer la radioactivité.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 3

Le radon

L'émission du radon 222 est la principale source externe d'exposition de l'homme à la radioactivité naturelle. On fait des mesures de radioactivité sur un échantillon d'un gaz prélevé dans le sol des Alpes sur une trentaine de centimètres de profondeur. Ce prélèvement contient du radon 222. On fait une série de 10 mesures de radioactivité de ce gaz avec un compteur Geiger espacées de 30 minutes. La période radioactive du radon 222 est de 3,8 jours.
On trouve les résultats suivants :

Mesures	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de désintégrations	54	63	71	73	48	93	68	59	81	69

a. L'unité de la radioactivité est le Siévert (Sv).
b. Ces mesures montrent que la radioactivité est un phénomène prévisible.
c. L'activité naturelle moyenne du radon 222 est de 2,2 Bq.
d. Au bout de 7,6 jours, l'activité du radon 222 a été divisée par 2.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 4

Datation au carbone 14

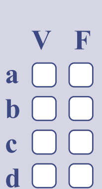
Le carbone 12 possède deux isotopes : le carbone 13 et le carbone 14. Le carbone 14 (^{14}C) se forme continuellement dans la haute atmosphère (Le Carbone 14 est constamment régénéré par les rayons cosmiques de l'atmosphère. Le rythme de formation du Carbone 14 est pratiquement constant à l'échelle de quelques siècles. Il dépend du flux des particules en provenance de l'espace qui bombardent la terre et du champ magnétique terrestre qui nous protège en partie contre ce bombardement.)

Le carbone 14 est très réactif et donne rapidement du « gaz carbonique (14) » qui, en quelques mois se mélange avec l'ensemble du dioxyde de carbone de notre atmosphère. Il sera ensuite assimilé par les plantes au même titre que le gaz carbonique produit avec du carbone 12 (ou 13). On le retrouvera donc comme constituant de la matière organique des animaux (aussi bien herbivores que carnivores).

Le chimiste W Libby (En 1960, Libby reçut le prix Nobel de chimie « pour sa méthode d'utilisation du carbone 14 servant à déterminer l'âge en archéologie, en géologie, en géophysique et d'autres branches de la science », Wikipédia) a démontré en 1950, que le rapport du nombre de noyaux de carbone 14 sur le nombre de noyaux de carbone 12 (contenu dans le dioxyde de carbone) est constant pour les êtres vivants.

Cela nous permet maintenant de dater les objets (d'origine vivante) anciens. Le carbone 14 se désintègre en émettant des particules β^-.

a. Le carbone 14 produit une radioactivité artificielle.
b. La radioactivité β^- est l'émission d'un électron.
c. La radioactivité β^- est arrêtée par une feuille de papier.
d. L'équation de la réaction de désintégration est la suivante :



$$^{14}_{6}C \longrightarrow ^{14}_{7}N + ^{0}_{+1}e$$

Exercice 5

Loi de décroissance radioactive

Dans le cadre d'un diagnostic, un médecin injecte une dose de glucose marqué par du fluor 18 ($^{18}_{9}F$). Le glucose s'accumule dans les cellules cancéreuses. Ce procédé permet la détection de cancers. Il doit être fabriqué dans le laboratoire.

À l'instant de fabrication (t = 0), on mesure l'activité radioactive du patient puis on recommence toutes les 20 minutes à l'aide d'une caméra spécifique. La courbe suivante donne l'activité radioactive du patient en fonction du temps. La dose initiale injectée est A_0 = 800 Mbq.

Activité radioactive du fluor

A(MBq): 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800

t(minutes): 0, 40, 80, 120, 160, 200, 240, 280, 320, 360, 400, 440, 480, 520, 560, 600

a. L'activité radioactive initiale est de 800 Mbq.
b. La période de demi-vie $\tau_{1/2}$ = 300 minutes.
c. La loi de décroissance radioactive est la suivante :

$$A(t) = A_0.exp(-\frac{t}{\tau_{1\backslash 2}})$$

d. On peut considérer l'activité radioactive négligeable au bout de 10 heures.

V F
a ☐ ☐
b ☐ ☐
c ☐ ☐
d ☐ ☐

Exercice 6

Fission nucléaire

Dans une centrale nucléaire, les noyaux d'uranium 235 sont collisionnés par des neutrons rapides. Sous le choc, les noyaux d'uranium se scindent en deux noyaux (appelés noyaux fils) en émettant trois neutrons. Une réaction en chaîne est alors en marche qu'il faudra évidemment contrôler.
Une de ces réactions aboutit à la formation de Lanthane $^{148}{}_{57}La$, mais aussi à la formation de brome $^{85}{}_{35}Br$.

a. L'énergie de liaison du noyau est celle qu'il faut fournir au noyau pour le dissocier totalement en ces nucléons (pris au repos).
b. L'énergie de liaison d'un noyau d'uranium est égale à 1 794 MeV.
c. L'équation de la réaction de fission de l'uranium est la suivante :

$$1\ {}^1_0n + {}^{235}_{92}U \longrightarrow {}^{148}_{57}La + {}^{85}_{35}Br + 2\ {}^1_0n$$

d. L'énergie libérée par la fission d'un noyau d'uranium est 600 MeV.

V F
a ☐ ☐
b ☐ ☐
c ☐ ☐
d ☐ ☐

Données :
$c = 3{,}00.10^8$ m.s^{-1} .
m_{noyau}(La) = $245{,}647.10^{-27}$ kg ; m_{noyau}(Br) = $141{,}033.10^{-27}$ kg ; m_{noyau}(U) = $390{,}215.10^{-27}$ kg ; $m_{neutron}$ = $1{,}674997.10^{-27}$ kg ; m_{proton} = $1{,}672622.10^{-27}$ kg et 1MeV = $1{,}6.10^{-13}$J.

Exercice 7

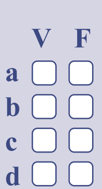
Fusion nucléaire

Depuis plusieurs décennies, les scientifiques rêvent d'exploiter la fusion nucléaire. Ce phénomène qui a lieu au cœurs des étoiles et produit une quantité énorme d'énergie.
Pour l'homme, cette énergie peut-être considérée comme propre. De surcroît, elle est inépuisable.
En quoi consiste la fusion nucléaire ?
Deux noyaux légers fusionnent pour donner un noyau plus lourd. Ce processus libère de l'énergie. C'est le cas dans la formation d'un noyau « d'hélium 4 » à partir de deux isotopes de l'hydrogène : le deutérium ($_1^2H$) et le tritium ($_1^3H$). On récupère une quantité d'énergie de quelques mégaélectronsvolts (MeV), suivant la réaction :

$$_1^2H + {}_1^3H \longrightarrow {}_2^4He + 1{}_0^1n$$

L'énergie de liaison du noyau est celle qu'il faut fournir au noyau pour le dissocier totalement en ces nucléons (pris au repos).

a. L'énergie produite par la fusion d'un noyau de tritium et d'un noyau de deuterium est égale à 17,6 MeV.
b. L'énergie de liaison d'un noyau de deuterium est égale à $2{,}81.10^{-13}$ J.
c. L'énergie produite par la fusion de 1,0 kg de deutérium est égale à $8{,}4.10^{13}$J.
d. Il faudrait 187 tonnes de pétrole pour produire autant d'énergie qu'un kilogramme de deutérium.

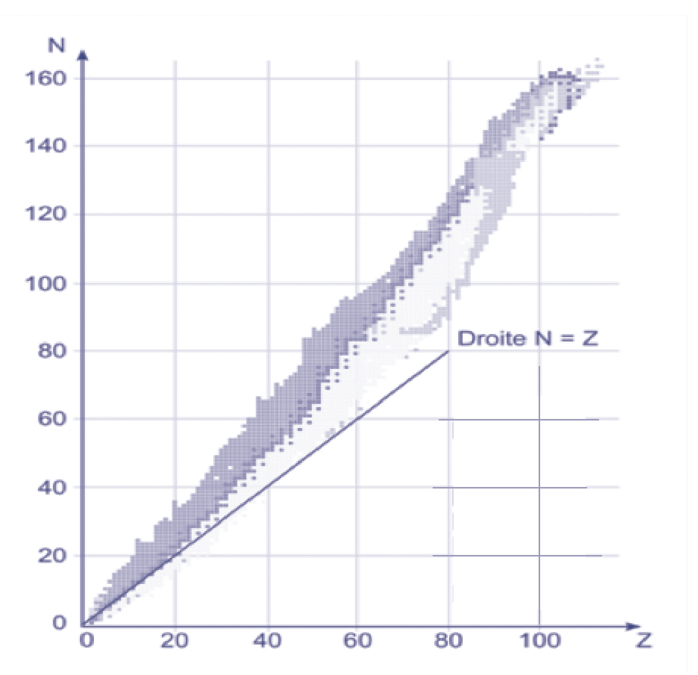


Données :
$c = 3{,}00.10^8$ m.s^{-1} .
m_{noyau}(tritium) = $5{,}008271.10^{-27}$ kg ; m_{noyau}(deutérium) = $3{,}344497.10^{-27}$ kg ; m_{noyau}(hélium 4) = $6{,}646483.10^{-27}$ kg ; $m_{neutron}$ = $1{,}674997.10^{-27}$ kg ; $m_{protron}$ = $1{,}672622.10^{-27}$ kg et 1MeV = $1{,}6.10^{-13}$J.
La combustion d'un kilogramme de pétrole libère une énergie E = 45.10 J sous forme de chaleur.

Exercice 8

Diagramme de Segré

Le diagramme de Ségré indique les isotopes stables ou radioactifs et fournit le type d'émission radioactive. Les axes sont : en abscisse : le nombre de neutrons N = A – Z et en ordonnée : le nombre de protons : Z. Ce diagramme est aussi appelé diagramme (N, Z).



a. Les noyaux représentés en foncé possèdent un excès de protons et donnent lieu à une émission β^+.

b. Les noyaux représentés sur la ligne séparant la partie foncée de la partie claire sont instables.

c. Les noyaux légers instables donnent lieu à une réaction de fission nucléaire.

d. Les noyaux représentés en clair sont instables.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

PHYSIQUE

CORRIGÉS

Exercice 1

a. Faux. Ils diffèrent par leur nombre de neutrons.

b. Vrai. Voir réponse précédente.

c. Vrai. Voir réponse précédente.

d. Faux. Voir réponse précédente.

Exercice 2

a. Faux. Son rayon d'action s'étend de la dimension de l'atome à l'infini.

b. Vrai.

c. Faux. L'interaction nucléaire forte agit à des distances inférieures au nanomètre.

d. Vrai.

Exercice 3

a. Faux. L'unité de la radioactivité est le Becquerel (Bq).

b. Faux. Au contraire, elles prouvent que c'est un phénomène aléatoire et imprévisible.

c. **Faux.** La moyenne de désintégration en 30 minutes est 67,9. Puis, on calcule ne nombre de désintégration en une seconde, on trouve 0,038 Bq.

d. Faux. La période radioactive est de 3,8 jours, donc 7,6 jours correspondent à 2 périodes. L'activité est alors divisée par 4.

Exercice 4

a. Faux. Le carbone 14 produit une radioactivité naturelle.

b. Vrai. La radioactivité β^- est l'émission d'un électron.

c. Faux. Elle est arrêtée par une feuille d'aluminium.

d. Faux. L'équation de la réaction de désintégration est la suivante :

$$^{14}_{6}C \longrightarrow {}^{14}_{7}N + 1\,^{0}_{-1}e$$

Exercice 5

a. Vrai. C'est dit dans l'énoncé.

b. Faux. La période de demi-vie $\tau_{1/2}$ est environ égale à110 minutes. Voir tracé ci-dessus.

c. Faux. Elle suit bien loi de décroissance exponentielle, mais son expression est différente : $A(t) = A_0.exp(-Ln2 \times \frac{t}{\tau_{1\backslash 2}})$

d. Faux. On peut considérer l'activité radioactive négligeable au bout de 10 périodes radioactives, soit environ une vingtaine d'heures.

Exercice 6

a. Vrai. C'est une définition.

b. Vrai.

$$E_{liaison}(U) = E_{toutes\ les\ particules} - E(U) = (92 \times 1,672622.10^{-27} + (235-92) \times 1,674997.10^{-27} - 390,215.10^{-27}) \times (3,00.10^8)^2$$

$$E_{liaison}(U) = 2,18172.10^{-10} J = \frac{2,18172.10^{-10} J}{1,6.10^{-13} J.MeV^{-1}} = 1795 MeV$$

L'énergie de liaison par nucléon est :

$$E_{liaison\backslash nucleon}(U) = 1795 MeV/235 = 7,638 MeV/nucleon$$

c. Faux. Il y a trois neutrons libérés.

d. Faux. L'énergie libérée par la fission d'un noyau d'uranium est 104 MeV.

PHYSIQUE

Exercice 7

a. Faux.

$$\Delta E = \Delta m \times c^2 = (-m({}^3_1H) - m({}^2_1H) + m({}^1_0n) + m({}^4_2He)).c^2$$

$$\Delta E = ((6,646483 + 1,672622 - 5,008271 - 3,344497) \times 10^{-27}) \times (3,00.10^8)^2 = 2,8098.10^{-13}\,J$$

$$\Delta E(MeV) = \frac{\Delta E(J)}{1,6.10^{-13}} = \frac{2,8098.10^{-13}}{1,6.10^{-13}} = 1,76\ MeV$$

b. Vrai. L'énergie de liaison d'un noyau de deuterium est égale à 2,81.10^{-13} J.

$$E_{liaison}({}^2_1H) = (m(1p) + m(1n) - m({}^2_1H)) \times c^2 = (1,672622 + 1,674997 - 3,344497).0^{-27} \times (3,00.10^8)^2$$

$$E_{liaison}({}^2_1H) = (1,672622 + 1,674997 - 3,344497) \times 10^{-27} \times (3,00.10^8)^2 = 2,8098.10^{-13}\,J$$

$$E_{liaison}({}^2_1H) = 2,81.10^{-12}\,J = 1,76 MeV$$

c. Faux. L'énergie produite par 1,0 kg de deutérium est égale à 8,4.10^{13}J. En effet :

$$E(1kg) = \frac{1,76 \times 1,6.10^{-13}}{3,344497.10^{-27}} = 8,40.10^{13}\,J$$

d. Faux. Il faudrait 1 826 tonnes de pétrole pour produire autant d'énergie qu'un kilogramme de deutérium.

$$\frac{8,40.10^{13}}{45.10^6} = 1867\ tonnes$$

Exercice 8

a. Faux. Les noyaux représentés en bleu possèdent un excès de neutrons et donnent lieu à une émission β^-.

b. Faux. Les noyaux représentés en rouge sont stables.

c. Faux Les noyaux légers instables donnent lieu à une réaction de fusion nucléaire.

d. Vrai. Les noyaux représentés en jaune sont instables. Ils donnent lieu à une désintégration β^+.

DÉCRIRE UN MOUVEMENT

Jefaislepointsurmesconnaissances

- ❖ Je connais la notion de vecteur en mathématiques.
- ❖ Je connais définir un système en physique.
- ❖ Je sais définir un référentiel en physique.
- ❖ Je connais les référentiels géocentriques et héliocentriques.
- ❖ Je sais faire la différence entre une date et une durée.
- ❖ Je sais calculer une vitesse moyenne et une vitesse instantanée.
- ❖ Je connais le vocabulaire inhérent au mouvement en physique : mouvement uniforme, mouvement accéléré, mouvement rectiligne, mouvement curviligne, mouvement de translation et mouvement circulaire.
- ❖ Je sais que le mouvement est uniforme lorsque la vitesse est constante.
- ❖ Je sais que le mouvement est accéléré ou décéléré si le va valeur de la vitesse varie.

Je sais définir

- ❖ Je sais définir le vecteur position d'un point M dans le repère cartésien en physique :

$$\overrightarrow{OM} = x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j} + z(t).\vec{k}$$

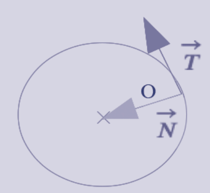
- ❖ Je sais définir le vecteur vitesse d'un point M dans le repère cartésien :

$$\vec{V}(M) = \frac{dx(t)}{dt}.\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}.\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt} = \vec{k}\,\dot{x}(t).\vec{i} + \dot{y}(t).\vec{j} + \dot{z}(t).\vec{k}$$

- ❖ Je sais définir le vecteur accélération d'un point M dans le repère cartésien :

$$\vec{a}(M) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}.\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}.\vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2} = \vec{k}\,\ddot{x}(t).\vec{i} + \ddot{y}(t).\vec{j} + \ddot{z}(t).\vec{k}$$

- ❖ Je connais le repère de Frénet.
- ❖ Je sais placer les deux vecteurs N et T dans le repère de Frénet.



❖ Je sais définir un mouvement rectiligne, un mouvement rectiligne et uniforme, un mouvement rectiligne uniformément varié.

❖ Je sais définir un mouvement circulaire.



Je sais maîtriser

❖ Je sais calculer la norme

– du vecteur position :

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$$

– du vecteur vitesse :

$$\|\overrightarrow{V}\| = \sqrt{V_x^2(t) + V_y^2(t) + V_z^2(t)} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$$

– du vecteur accélération :

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t) + a_z^2(t)} = \sqrt{\ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t) + \ddot{z}^2(t)}$$

❖ Je sais reconnaître un mouvement rectiligne, un mouvement rectiligne et uniforme, un mouvement circulaire.

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1

Accélération

a. L'accélération d'un point matériel dont la vitesse est constante (50 km/h) est systématiquement nulle.

b. L'accélération d'un point matériel dont la vitesse est constante (50 km/h) et dont le mouvement est rectiligne est systématiquement nulle.

c. Dans un mouvement circulaire et uniforme, l'accélération normale est nulle.

d. Dans un mouvement circulaire et uniforme, l'accélération tangentielle est nulle.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 2

Référentiel

Un référentiel est un point fixe ou mobile de l'espace lié ou pas à un objet.

a. Un référentiel est dit galiléen lorsqu'il est en translation par rapport à un autre référentiel galiléen.

b. Un référentiel est dit galiléen lorsqu'il est en translation rectiligne par rapport à un autre référentiel galiléen.

c. Le Soleil est un référentiel galiléen.

d. Le référentiel géocentrique est un référentiel galiléen.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 3

Cinématique

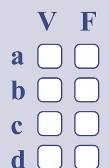
Le vecteur position $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ permet de repérer le point M dans le repère d'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les axes sont gradués en cm.

a. La longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est environ égale à 38 cm.

b. Le vecteur vitesse a pour expression $\vec{V}(M) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

c. La valeur du vecteur vitesse est égale à $6{,}2 \text{m.s}^{-1}$.

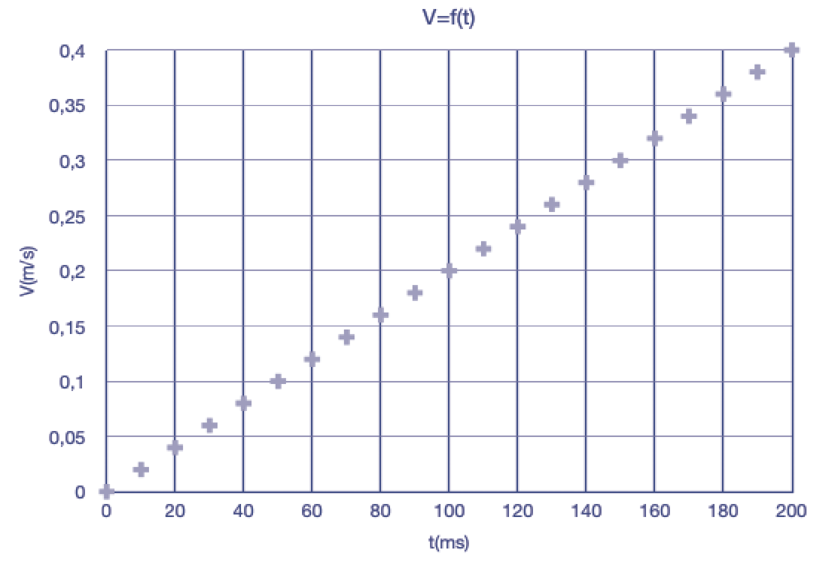
d. L'expression de la norme du vecteur vitesse est $V(M) = \sqrt{\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}}$



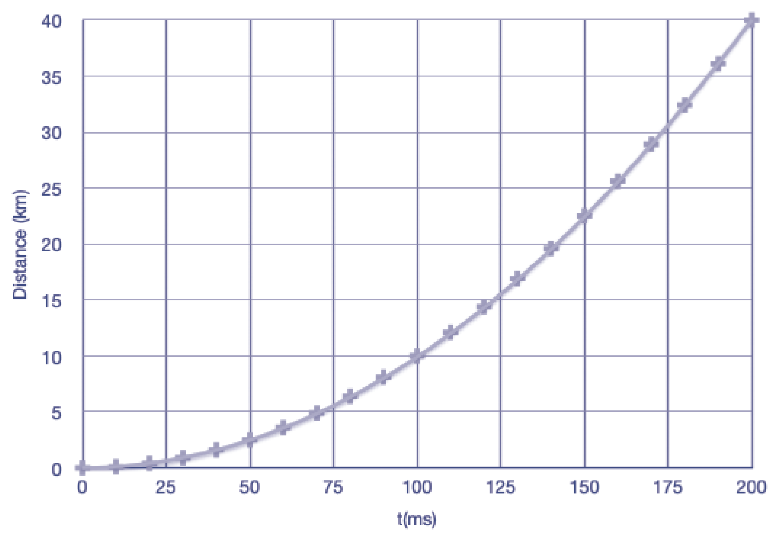
Exercice 4

Nature du mouvement

Le graphique suivant donne la vitesse d'un point matériel M en fonction du temps. Le mouvement de ce point est rectiligne.



a. Le mouvement est rectiligne et uniforme.
b. L'accélération vaut 0,50 m.s^{-2}.
L'évolution de la distance parcourue en fonction de la durée et représentée ci-dessous :



	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

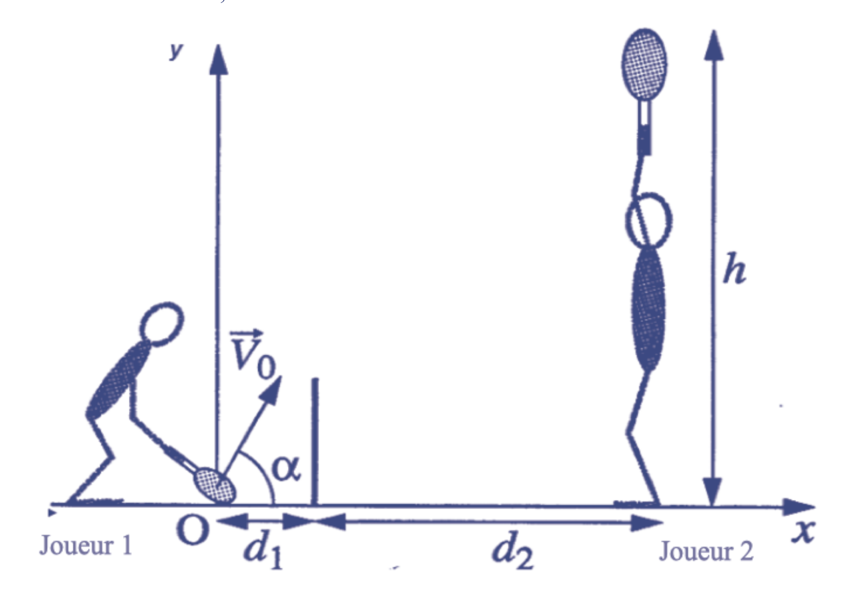
c. La distance parcourue au bout de 100 ms est de 10 km.

d. La loi horaire est $x(t) = 2,0.t^2 + 10.t$.

Énoncé commun aux exercices 5,6 et 7.

Le « lob » est un coup de tennis qui permet à un joueur d'envoyer la balle au-dessus et hors d'atteinte de son adversaire pour la faire rebondir au fond du terrain.
Le joueur 1 frappe la balle au point O, juste au niveau du sol (donc à une altitude nulle) et lui communique une vitesse initiale, de norme V_0 = 45 km.h^{-1}, faisant l'angle α = 45° avec l'horizontale.

Le point O est situé à $d_1 = 1,0$ m du filet.
Le joueur 2 est de l'autre côté du filet, à une distance $d_2 = 8,0$ m du filet. Il tend sa raquette verticalement pour essayer de toucher la balle : le tamis de sa raquette est alors situé à une hauteur h = 2,4 m au-dessus du sol. L'accélération **g** est verticale, descendante et vaut 9,8 m.s^{-2}.



Exercice 5

a. Le vecteur accélération **a** a pour coordonnées : ($a_x = 0$; $a_y = 9,8$)
b. Le vecteur vitesse **V** a pour coordonnées : ($V_x(t) = V_0.\cos\alpha$; $V_y(t) = V_0.\sin\alpha.t - 9,8$)
c. Le vecteur position **OM** a pour coordonnées : ($x(t) = V_0.\cos\alpha.t$; $y(t) = 4,9.t^2 + V_0\sin\alpha.t$).
d. Le vecteur position **OM** a pour coordonnées : ($x(t) = V_0.\cos\alpha.t$; $y(t) = - 4,9.t^2 + V_0\sin\alpha.t$).

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 6

a. La hauteur maximale est atteinte par la balle lorsque $V_x(t) = 0$.
b. La hauteur maximale est atteinte par la balle lorsque $V_y(t) = 0$.
c. L'équation de la trajectoire est $y(t) = 4,9.t^2 + V_0\sin\alpha.t$
d. On détermine la portée en résolvant l'équation y(x) = 0.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 7

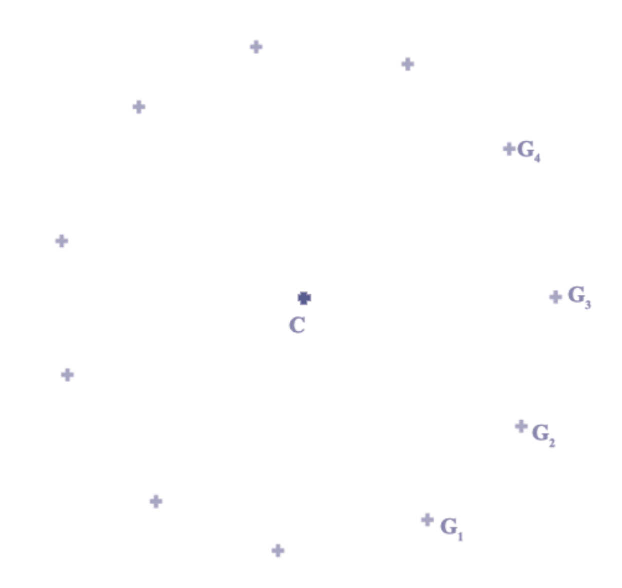
a. La balle passe 1,0 m au-dessus du filet.
b. La balle passe 0,90 m au-dessus du filet.
c. La balle passe au-dessus de la raquette du deuxième joueur.
d. Le deuxième joueur peut frapper dans la balle et smasher.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Énoncé commun aux exercices 8 et 9.

On enregistre le mouvement d'une bille repérée par son centre de gravité G attachée à un point C et tournant autour de ce point. Le rayon de la trajectoire est de 10 cm.

Exercice 8



a. Le mouvement du point G est circulaire et varié.
b. Le mouvement du point G est circulaire et uniforme.
c. Le vecteur vitesse **V** du point G est constant.
d. La valeur de la vitesse V du point G est constante.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 9

a. Le vecteur accélération **a** est composé d'une accélération tangentielle non nulle et d'une accélération normale non nulle.
b. Le vecteur accélération **a** est composé d'une accélération tangentielle nulle et d'une accélération normale non nulle.
c. Le vecteur accélération **a** est composé d'une accélération tangentielle non nulle et d'une accélération normale nulle.
d. Le vecteur accélération a est composé d'une accélération tangentielle nulle et d'une accélération normale nulle.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

CORRIGÉS

PHYSIQUE

Exercice 1

a. Faux. Lors d'un mouvement circulaire et uniforme, la valeur de la vitesse est constante, en revanche l'accélération normale $a_n = v^2/R$ (R= rayon de la trajectoire). (L'accélération tangentielle est nulle).

b. Vrai. Dans ce cas effectivement l'accélération est nulle.

c. Faux. Voir réponses précédentes.

d. Vrai. Voir réponses précédentes.

Exercice 2

a. Faux. Pour être précis, un référentiel est dit galiléen lorsqu'il est en translation rectiligne par rapport à un autre référentiel galiléen.

b. Vrai. Voir réponse précédente.

c. Faux. Le centre du Soleil est un référentiel galiléen.

d. Faux. Le référentiel géocentrique est lié au centre de la Terre. Or celui-ci tourne autour du Soleil. Donc en toute rigueur, ce référentiel n'est pas galiléen. Cependant dans un laps de temps suffisamment court, on peut considérer le mouvement du centre de la Terre rectiligne et uniforme dans la trajectoire qu'il décrit autour du Soleil.

Exercice 3

a. Faux. La longueur du vecteur **OM** est : $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} = 6,2\ cm$

b. Vrai. Le vecteur vitesse a pour expression :

$$\overrightarrow{V}(M) = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{j} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{k}$$

c. Faux. La valeur du vecteur vitesse est égale à 0 m.s^{-1}.

d. Faux. L'expression de la norme du vecteur vitesse est :

$$V = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

Exercice 4

a. Faux. La valeur de la vitesse varie.

b. Faux. L'accélération vaut 2,0 m.s^{-2}.

c. Vrai. Voir graphique.

d. Faux. L'équation de la trajectoire est $x(t) = t^2$

Exercice 5

a. Faux. Le vecteur accélération **a** a pour coordonnées : ($a_x = 0$; $a_y = -9{,}8$)

b. Faux. Le vecteur vitesse **V** a pour coordonnées :

($V_x(t) = V_0.\cos\alpha$; $V_y(t) = -9{,}8.t + V_0.\sin\alpha.t$)

c. Faux. Le vecteur position **OM** a pour coordonnées :

($x(t) = V_0.\cos\alpha.t$; $y(t) = -4{,}9.t^2 + V_0\sin\alpha.t$).

d. Vrai. Voir réponse précédente.

Exercice 6

a. Faux. La hauteur maximale est atteinte par la balle lorsque $V_y(t) = 0$.

b. Vrai. Voir réponse précédente.

c. Faux. L'équation de la trajectoire : $y(x) = -4{,}9 \times (\frac{x}{V_0.cos\alpha})^2 + tan\ \alpha \times x$

d. Vrai. On détermine la portée en résolvant l'équation y(x) = 0. On trouve une portée de 8,8 m.

Exercice 7

a. Faux. La balle passe 0,94 m au-dessus du filet.

b. Vrai. La balle passe 0,90 m au-dessus du filet. En effet : y(1 m) = 0,94 m.

c. Vrai La balle passe à 1,5 m de la raquette du deuxième joueur.

d. Faux. Le deuxième joueur ne peut frapper dans la balle et smasher (sans sauter). En effet : y(9,0 m) = 3,9 m, soit 1,5 m au-dessus de la raquette.

Exercice 8

a. Faux. Le mouvement est circulaire et uniforme car la valeur de la vitesse est constante.

b. Vrai. Il est uniforme car la vitesse est constante.

c. Faux. Le vecteur vitesse **V** voit sa direction changer à chaque instant.

d. Vrai. La valeur de la vitesse **V** est constante car la distance entre deux points consécutifs ne varie pas.

Exercice 9

a. Faux. Le vecteur accélération **a** possède une accélération normale non nulle et égale à V_0^2/R et une accélération tangentielle nulle.

b. Vrai. Voir réponse précédente.

c. Faux. Voir réponse précédente.

d. Faux. Voir réponse précédente.



MOUVEMENT ET FORCE

PHYSIQUE

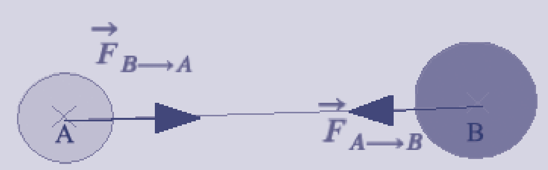
Je fais le point sur mes connaissances

- Je connais les différents types de mouvements (rectiligne quelconque, rectiligne uniforme, circulaire et uniforme, curviligne).
- Je sais ce qu'est un référentiel et notamment un référentiel galiléen.
- Je connais le principe d'inertie (1re loi de Newton).
- *Dans un référentiel galiléen, si un système est en équilibre (repos ou mouvement rectiligne et uniforme) alors la somme des forces extérieures agissant sur ce système est égale au vecteur nul.*
- Je connais la force de pesanteur et je sais qu'elle peut-être assimilée à la force de gravitation exercée par la Terre sur un objet de masse m et proche de la Terre.

$$\vec{P} = m.\vec{g}$$

Avec $\vec{g}$ champ de pesanteur ($N.kg^{-1}$).

- Je connais la force gravitationnelle s'exerçant entre deux objets A et B de masse respective m_A et m_B.



- Je connais l'expression de la force gravitationnelle s'exerçant entre deux objets de masse respective m_A et m_B.

$$\|\vec{F}_{A\ sur\ B}\| = \|\vec{F}_{B\ sur\ A}\| = \frac{G \times m_A \times m_B}{d^2_{AB}}$$

Où $G = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^2$, m_A, m_B en kg et d_{AB} (distance entre A et B) en mètre.

- Je connais les deux autres lois de Newton (2e loi : appelée principe fondamental de la dynamique [PFD] et 3e loi de Newton : principe de l'action et de la réaction).

Deuxième loi de Newton

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures agissant sur un système S est égale au produit de la masse du système par le vecteur accélération du centre d'inertie du système S.

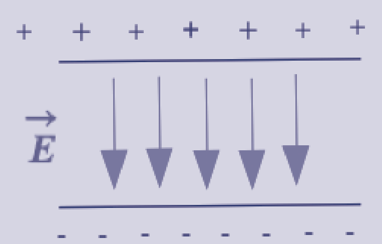
$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\frac{d\vec{V}(G)}{dt}$$

Troisième loi de Newton

Toute action mécanique sur un système entraîne une réaction.

❖ Je connais la charge électrique élémentaire e et je connais sa valeur : **$e = 1,6.10^{-19}$C.**

❖ Je sais que deux plaques polarisées créent un champ électrique **E**. Je sais que ce champ électrique est dirigé perpendiculairement aux plaques et orienté de la plaque positive vers la plaque négative.



❖ Je sais qu'une particule dont la charge électrique est q placée dans un champ électrique E est soumise à une force électrique F telle que :

$$\vec{F} = q.\vec{E}$$



Je sais définir

❖ Je sais définir un condensateur plan.

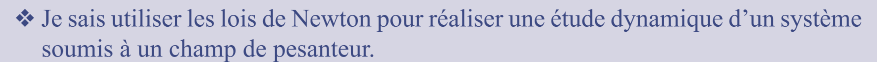
❖ Je sais définir la deuxième loi de Newton.

❖ Je sais que l'énergie cinétique d'un système de masse m et dont le centre d'inertie possède une vitesse v que Ec = ½.m.v^2(G).

❖ Je sais définir l'énergie potentielle de pesanteur Epp d'un système de masse m et situé à l'altitude z_A par rapport à un niveau de référence situé à l'altitude z_B : Epp = m.g.($z_A - z_B$).

❖ Je sais définir l'énergie mécanique Em d'un système de masse m : Em = Epp + Ec.

Je sais maîtriser



❖ Je sais utiliser les lois de Newton pour réaliser une étude dynamique d'un système soumis à un champ de pesanteur.

❖ Je sais utiliser les lois de Newton pour réaliser une étude dynamique d'un système soumis à un champ électrique.

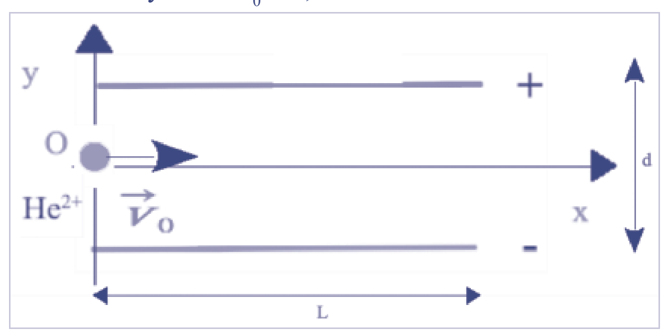
❖ Je sais mener une étude énergétique pour retrouver la vitesse d'un système à tout instant.

ENTRAÎNEMENTS

PHYSIQUE

Énoncé commun aux exercices 1, 2, 3, 4 et 5.

Un noyau d'hélium de charge q = +2e est placé entre deux plaques d'un condensateur distantes de d = 5,0 cm et dont la longueur L = 20 cm. Il existe une tension U entre les deux plaques égale à 3,0 kV. La masse du noyau d'hélium : $m({}^{4}_{2}He^{2+}) = 6,68.10-27$kg. Le coefficient de pesanteur sut Terre est $g = 9,8\ N.kg^{-1}$. La vitesse initiale du noyau est $V_0 = 1,0.10^6\ m.s^{-1}$.



Exercice 1

Champ électrique et force électrique

a. Il existe entre les deux plaques un champ électrique **E** dirigé de la plaque négative vers la plaque positive.

b. Il existe entre les deux plaques un champ électrique **E** dirigé de la plaque positive vers la plaque négative.

c. La particule d'hélium est soumise à une force électrique **F** dirigée de la plaque positive vers la plaque négative.

d. La particule d'hélium est soumise à une force électrique **F** dirigée de la plaque négative vers la plaque positive.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 2

Valeur du champ électrique et de la force électrique

a. Le champ électrique **E** entre les deux plaques est uniforme.

b. Le champ électrique **E** entre les deux plaques n'est pas uniforme.

c. La force électrique **F** exercée par le champ électrique **E** sur le noyau d'hélium est égale à $9,6.10^{-15}$ N.

d. La force électrique **F** exercée par le champ **E** sur le noyau d'hélium est égale à $1,92.10^{-17}$ N.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 3

Étude des forces

a. Lorsque le noyau entre dans le condensateur, il est soumis à deux forces dont une est négligeable.
b. Lorsque le noyau entre dans le condensateur, il est soumis à deux forces comparables en ce qui concerne leur intensité.
c. Le poids de la particule est une force verticale ascendante.
d. La force électrique est une force verticale ascendante.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 4

Étude du mouvement

a. Le mouvement est rectiligne et uniforme.
b. Le mouvement est parabolique.
c. L'accélération vaut $2{,}87.10^9$ m.s^{-2}.
d. Le noyau d'hélium sort des plaques à une distance de 5,7 cm au-dessous de l'axe.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 5

Étude énergétique

a. L'énergie mécanique en O est égale à 20,9 keV.
b. L'énergie cinétique du noyau à la sortie des plaques est augmentée de 12 keV.
c. La vitesse du noyau d'hélium à la sortie des plaques est de $2{,}6.10^6$ m.s^{-1}.
d. La vitesse du noyau d'hélium à la sortie des plaques est relativiste.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Énoncé commun aux exercices 6 et 7.

Lors d'un coup franc, les joueurs de l'équipe verte forment un mur de cinq personnes dont la taille moyenne est de 1,80 m. Le tireur du coup franc de l'équipe rouge se trouve à L_1 = 9,15 m du mur. Le ballon a une masse m = 475 g.
La lucarne du but se trouve à L_2 = 20 m du ballon lorsque ce dernier est posé sur le sol pour exécuter le coup franc. Lorsque le joueur rouge exécute son tir, il communique au ballon une vitesse initiale V_0 = 12 m.s^{-1}. L'angle formé entre le vecteur vitesse V_0 et l'horizontale est θ = 25°. La hauteur de la barre transversale est d = 2,44 m. Tout au long de notre étude, nous négligerons les frottements de l'air sur le ballon.

Exercice 6

Si on considère que le ballon est placé en un point O centre d'un repère imaginaire d'axes Ox (direction du but) et Oy (verticale du lieu), alors :

a. Les lois horaires du mouvement du ballon sont :

$$\begin{cases} x(t) = V_0 \times cos\theta \times t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g \times t^2 + V_0 \times sin\theta \times t \end{cases}$$

b. L'équation de la trajectoire est :

$$y(x) = -\frac{1}{2} \times g \times (\frac{x}{V_0 \times sin\theta})^2 + tan\theta \times x$$

c. Le ballon passe à plus de 90 cm au-dessus du mur.
d. Le ballon passe sous la lucarne du but.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

PHYSIQUE

Exercice 7

On modifie l'angle de tir.

On modifie l'angle de tir de 6° tel que θ' = 19°.
a. Le ballon passe toujours au-dessus du mur.
b. Le ballon passe au-dessus de la barre transversale.
c. Le ballon fait un rebond avant de rentrer dans les buts.
d. Le ballon ne fait pas de rebond avant de rentrer dans les buts.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 8

Étude énergétique

a. Il y a conservation de l'énergie cinétique au cours du mouvement.
b. Il y a conservation de l'énergie mécanique au cours du mouvement.
c. L'énergie potentielle du ballon reste constante au cours du mouvement.
d. Le poids du ballon est une force conservative.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 9

Réaction du goal

En revenant sur un angle de tir de 25° :
a. Les joueurs constituant le mur ont moins de 0,5 seconde pour réagir.
b. Les joueurs constituant le mur ont moins de 1,0 seconde pour réagir.
c. Le goal a moins de 1,0 seconde pour réagir.
d. Le goal a moins de 1,5 seconde pour réagir.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

CORRIGÉS

Exercice 1

a. Faux. Il existe bien entre les deux plaques un champ électrique **E** dirigé de la plaque positive vers la plaque négative.

b. Vrai. Voir réponse précédente.

c. Vrai. La charge de ce noyau est positive, donc la force F a le même sens que le champ électrique E. Plus simplement, le noyau est attiré par la plaque chargée négativement.

d. Faux. Voir réponse précédente.

Exercice 2

a. Vrai. (Voir cours).

b. Faux. Voir réponse précédente.

c. Faux. La force électrique **F** exercée par le champ **E** sur le noyau d'hélium est égale à $1{,}92.10^{-14}$ N.

d. Faux. La force électrique **F** exercée par le champ **E** sur le noyau d'hélium est égale à $1{,}92.10^{-14}$ N.

Exercice 3

a. Vrai. Le poids est négligeable devant la force électrique. En effet :

$$\frac{F_{électrique}}{P} = \frac{q \times E}{m \times g} = \frac{q \times U}{d \times m \times g} = \frac{3,2.10^{-19} \times 3000}{0,05 \times 6,68.10^{-27} \times 9,8} \approx 10^{11}$$

b. Faux. Voir réponse précédente.

c. Faux. Le poids de la particule est une force verticale descendante.

d. Faux. La force électrique est une force verticale descendante.

Exercice 4

a. Faux. Les forces appliquées sont perpendiculaires à la vitesse initiale, le mouvement du noyau est donc parabolique.

b. Vrai. Voir réponse précédente.

c. Faux. L'accélération vaut $2{,}87.10^{12}$ $m.s^{-2}$. En effet :

$$a = \frac{q \times E}{m} + g = \frac{q \times U}{m \times d} + g = \frac{2 \times 1,6.10^{-19}}{6,68.10^{-27} \times 0,050} + 9,8 = 2,87.10^{12} m.s^{-2}$$

d. Vrai. Le noyau d'hélium sort des plaques à une distance de 5,7 cm au-dessous de l'axe.

$$y(x) \approx \frac{q \times U}{2 \times d \times m} \times \left(\frac{L}{V_0}\right)^2 = \frac{3,2.10^{-19} \times 3000}{2 \times 0,050 \times 6,68.10^{-27}} \times \left(\frac{0,20}{1,0.10^6}\right)^2 = 0,057\ m = 5,7\ cm$$

Exercice 5

a. Vrai. L'énergie mécanique en O est égale à 20,9 keV. En effet :

$$E_c(O) = \frac{1}{2} \times m \times V_0^2 = 0,5 \times 6,68.10^{-27} \times \left(1,0.10^6\right)^2 = 3,34.10^{-15} J = 20875 eV \approx 20,9 keV$$

b. Faux. Voir réponse précédente.

c. Faux. La vitesse du noyau d'hélium à la sortie des plaques est de $1,1.10^6$ $m.s^{-1}$. En effet :

$$E_{c_f} - E_{c_i} = W_d(\vec{F}_{ext}) \approx q \times U \Longrightarrow E_{c_f} = E_{c_i} + q \times U \Longrightarrow V_f = \sqrt{\frac{2\left(E_{c_f} + q \times U\right)}{m}}$$

$$V_f = \sqrt{\frac{2\left(E_{c_i} + q \times U\right)}{m}} = \sqrt{\frac{2\left(0,5 \times 6,68.10^{-27} \times \left(1,0.10^6\right)^2\right) + 2 \times 3,2.10^{-19} \times 3000}{6,68.10^{-27}}} = 1,1.10^6 m.s^{-1}$$

d. Faux. Pour être relativiste, une particule doit posséder une vitesse supérieure ou égale à 1/10e la vitesse de la lumière.

Exercice 6

a. Vrai.

b. Faux. L'équation de la trajectoire est :

$$y(x) = -\frac{1}{2} \times g \times \left(\frac{x}{V_0 \times cos\theta}\right)^2 + tan\theta \times x$$

c. Vrai. Pour cela on calcule $y(L_1)$:

$$y(L_1) = -0,5 \times g \times \left(\frac{L_1}{V_0 \times cos\theta}\right)^2 + L_1 \times tan\theta$$

$$y(9,15) = -0,5 \times g \times \left(\frac{9,15}{18 \times cos25}\right)^2 + 9,15 \times tan25 = 2,72$$

Le ballon passe donc (2,72-1,80) 90 cm au-dessus du mur.

d. Vrai. On calcule $y(L_2)$:

$$y(L_2) = -0,5 \times g \times \left(\frac{L_2}{V_0 \times cos\theta}\right)^2 + L_2 \times tan\theta$$

$$y(20) = -0,5 \times g \times \left(\frac{20}{18 \times cos25}\right)^2 + 20 \times tan25 = 1,96$$

Le ballon passe donc bien sous la lucarne gauche du but.

Exercice 7

a. Faux. Le ballon est arrêté par le mur. En effet :

$$y(\theta = 19, x = L_1) = -0,5 \times g \times \left(\frac{9,15}{18 \times cos19}\right)^2 + 9,15 \times tan19 < 1,80$$

b. Faux. Le ballon est arrêté par le mur.
c. Faux. Le ballon est arrêté par le mur.
d. Faux. Le ballon est arrêté par le mur.

Exercice 8

a. Faux. Si l'on considère l'absence de frottement, l'énergie mécanique est conservée, en revanche l'énergie cinétique varie.
b. Vrai. Voir réponse précédente.
c. Faux. L'énergie potentielle varie car l'altitude du ballon varie elle aussi.
d. Vrai. Le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi par le ballon.

Exercice 9

a. Faux. La première loi horaire me permet de répondre à la question :

$$x = V_0 \times cos\theta \times t_1 \Longrightarrow t_1 = \frac{L_1}{V_0 \times cos\theta} = \frac{9,15}{18 \times cos25} = 0,56s$$

b. Vrai. Voir réponse précédente.
c. Faux.

$$x = V_0 \times cos\theta \times t_1 \Longrightarrow t_1 = \frac{L_2}{V_0 \times cos\theta} = \frac{20}{18 \times cos25} = 1,2s$$

d. Vrai. Voir réponse précédente.

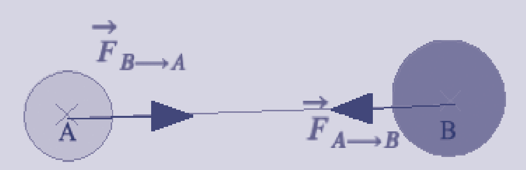


MOUVEMENT DES SATELLITES

PHYSIQUE

Je fais le point sur mes connaissances

- Je sais ce qu'est un référentiel et notamment un référentiel galiléen : référentiel héliocentrique et géocentrique.
- Je connais le principe d'inertie (1re loi de Newton).
- Dans un référentiel galiléen, si un système est en équilibre (repos ou mouvement rectiligne et uniforme) alors la somme des forces extérieures agissant sur ce système est égale au vecteur nul.
- Je connais la force de pesanteur et je sais qu'elle peut-être assimilée à la force de gravitation exercée par la Terre sur un objet de masse m et proche de la Terre.
  $\vec{P} = m.\vec{g}$ avec $\vec{g}$ champ de pesanteur ($N.kg^{-1}$).
- Je connais la force gravitationnelle s'exerçant entre deux objets A et B de masse respective m_A et m_B.



- Je connais l'expression de la force gravitationnelle s'exerçant entre deux objets de masse respective m_A et m_B.

$$\|\vec{F}_{A\longrightarrow B}\| = \|\vec{F}_{B\longrightarrow A}\| = G\frac{m_A.m_B}{d^2_{AB}}$$

  Où $G = 6{,}67.10^{-11}$ $N.m^2.kg^2$, m_A, m_B en kg et d_{AB} (distance entre A et B) en mètre.
- Je connais les deux autres lois de Newton (2e loi : appelé principe fondamental de la dynamique [PFD] et 3e loi de Newton : principe de l'action et de la réaction).

  Deuxième loi de Newton
  Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures agissant sur un système S est égale au produit de la masse du système par le vecteur accélération du centre d'inertie du système S.

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\frac{d\vec{V}(G)}{dt}$$

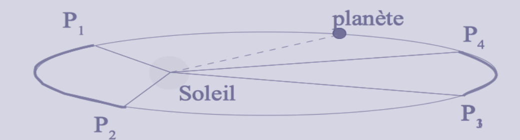
  Troisième loi de Newton
  Toute action mécanique sur un système entraîne une réaction sur ce système.
- Je sais appliquer les lois de Newton dans un champ de pesanteur.

Je sais définir

❖ Je connais les lois de Kepler.

Première loi de Kepler
Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre d'une planète est une ellipse dont l'un des foyers est le centre du Soleil.

Deuxième loi de Kepler
Le rayon vecteur reliant le centre d'une planète et le centre du Soleil balaie des aires égales pendant des durées égales.



Sa vitesse est maximale au périhélie et minimale à l'aphélie.

Troisième loi de Kepler
Pour toutes planètes du système solaire, le rapport entre le carré de la période de révolution (durée nécessaire pour effectuer un tour complet autour du Soleil) de la planète T et le cube du demi grand axe a de l'orbite elliptique est constant :

$$\frac{T^2}{a^3} = k \text{ avec } \begin{cases} a : \text{demi} - \text{grand axe} & m \\ T : \text{période de révolution} & s \\ k : \text{constante indépendante de la planète} & s^2.m^{-3} \end{cases}$$

❖ Si le mouvement est circulaire et uniforme, alors l'accélération tangentielle a_T est nulle et l'accélération normale $a_N = V^2/R$ (R : rayon de la trajectoire circulaire et V : vitesse de la planète autour du Soleil).

❖ Je connais la définition du périhélie et l'aphélie d'une trajectoire elliptique.

❖ Dans le cas d'une trajectoire circulaire et uniforme, la vitesse de la planète est égale à :

$$V = \sqrt{G.\frac{M_S}{r}} \text{ avec } \begin{cases} G : \text{constante de gravitation universelle} & = 6,67.10^{-11}\, N.m^3.kg^{-2} \\ V : \text{vitesse de la planète} & m.s^{-1} \\ r : \text{rayon de la trajectoire} & m \end{cases}$$

❖ Je sais ce qu'est un satellite géostationnaire.

Il est fixe par rapport à la surface de la Terre, le plan de l'orbite est équatorial et la période de révolution du satellite est la même que celui de la Terre. Il est distant de la terre de 36 000 km.

Je sais maîtriser

❖ Je sais utiliser la troisième loi de Kepler dans le cas du système solaire.

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_S} \text{ avec } \begin{cases} T : \text{période de révolution de la planète} & s \\ R : \text{rayon de l'orbite de la planète} & m \\ M_S : \text{masse du Soleil} & kg \end{cases}$$

ENTRAÎNEMENTS

PHYSIQUE

Énoncé commun aux exercices 1 et 2.

Jupiter est la plus grosse planète du système solaire. Cette planète possède 4 satellites naturels. La période de révolution de ces satellites est notée T_i et le rayon de leur orbite est noté r_i. Chaque satellite est soumis à une force gravitationnelle : la force d'attraction de Jupiter sur le satellite. La masse de Jupiter est égale à $1{,}9.10^{27}$ *kg*.

Données :

Satellites	Io	Europe	Ganymède	Callisto
T_i (jours)	1,8	3,6	…	17
Masse (kg)	$4{,}8.10^{22}$ kg	…	…	…
r_i (km)	$4{,}2.10^5$	…	11.10^5	19.10^5

Exercice 1

Jupiter

a. Jupiter est une planète tellurique.
b. L'unité de la constante gravitationnelle est le $m^3.s^{-2}.kg^{-1}$.
c. La valeur du rayon de l'orbite d'Europe est égale à $5{,}5.10^8$ m.
d. Chaque satellite est soumis à une force gravitationnelle : la force d'attraction de Jupiter sur le satellite.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 2

Les satellites de Jupiter

a. La vitesse de Callisto sur son orbite (considérée comme circulaire) est 8 128 $m.s^{-1}$.
b. La période de révolution de Ganymède sur son orbite est égale à 6,5 jours.
c. La force de gravitation exercée par Jupiter sur Io est égale à $4{,}5.10^{19}$ *N*.
d. La force exercée par Io sur Jupiter est égale à $4{,}5.10^{22}$ *N*.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 3

Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est un satellite qui, placé sur une orbite de 36 000 km d'altitude, semble fixe pour un observateur immobile à la surface de la Terre. Télécom 2 est un satellite géostationnaire.

a. Un satellite géostationnaire paraît immobile par rapport à un point fixe de la surface de la Terre.
b. La vitesse de rotation du satellite autour de la Terre est $7{,}3.10^{-5}$ $rad.s^{-1}$.
c. La vitesse de ce satellite est 3,0 $km.s^{-1}$.
d. Tous les satellites géostationnaires ont la même masse.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

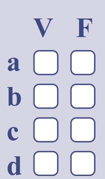
Exercice 4

La comète Neowise



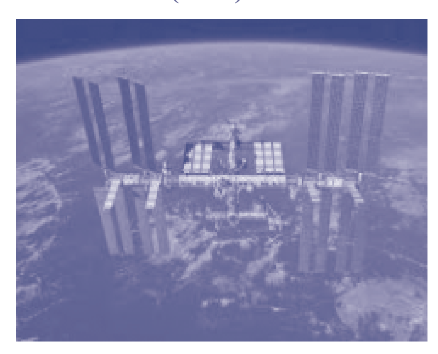
La comète Neowise est apparue dans le ciel pendant une durée de 1 mois lors de l'été 2020. À cette période, la distance séparant cette comète et la Terre est d'ernviron 120 millions de km. Son aphélie est 630 UA et son périhélie est à 0,20 UA.
Données : 1UA = 150 millions de km.

a. La distance entre la Terre et la comète est de 0,67 UA.
b. Si l'on considère la trajectoire de cette comète comme circulaire autour du Soleil alors le rayon de son orbite est environ de 315 UA.
c. Cette comète a une période de révolution d'environ 5 600 ans.
d. On reverra cette comète dans 3 000 ans.



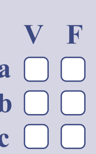
Exercice 5

La station spatiale internationale (I.S.S)

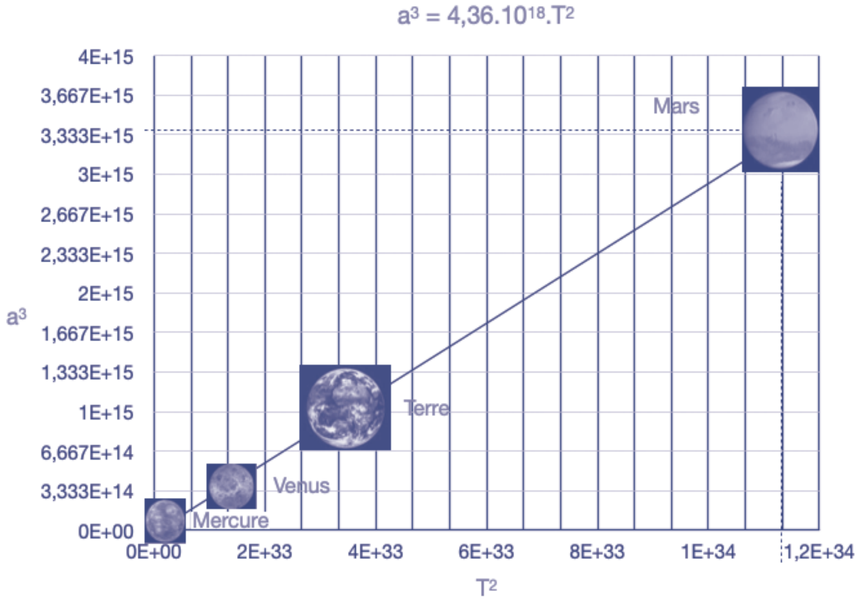


La station spatiale internationale (ISS) a une masse de 420 tonnes. Son altitude de h = 400 km. Sa trajectoire autour de la Terre peut-être considérée comme circulaire.
Données : masse de la Terre : m_{Terre} = $6{,}0.10^{24}$4 kg ; masse du soleil : m_{Soleil} = $2{,}0.10^{30}$ kg. Rayon de la Terre : R_T = 6 380 km.

a. La force gravitationnelle exercée par la Terre sur cette station est de $3{,}8.10^{7}$N.
b. Son accélération est égale à $8{,}6.10^{1}$ m.s^{-2}.
c. La vitesse de la station est égale à 763 m.s^{-1}.
d. Sa période de révolution est de 24 heures.



Exercice 6



La troisième loi de Kepler

Le graphique ci-dessus donne l'évolution de a^3 (a : rayon de l'orbite de la planète) en fonction du carré de sa période de révolution T^2.

Il s'agit des planètes telluriques du système solaire.

a. Ce graphique me permet de déterminer la masse du Soleil.

b. Ce graphique me permet de déterminer la masse d'une des quatre planètes.

c. La masse du Soleil = $2{,}0.10^{30}$ **kg.**

d. La masse de Mars est égale à $2{,}0.10^{27}$ kg.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 7

Satellite géostationnaire



Données : rayon de la Terre R_T = 6 380 km.

Un satellite est dit géostationnaire lorsqu'il reste constamment au-dessus d'un point de la terre.

a. Ce satellite a une orbite contenue dans un plan perpendiculaire au plan équatorial.

b. Sa période de révolution dans le référentiel géocentrique est de 24h00.

c. Son altitude est de 36 000 km.

d. Sa vitesse linéaire est égale à celle d'un point périphérique de la Terre.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

CORRIGÉS

Exercice 1

a. Faux. Jupiter est une planète gazeuse.

b. Faux. L'unité de la constante gravitationnelle est le $m^{-1}.s^{-2}.kg^{-1}$.
Démonstration :

$$[F] = [m.a] = kg.m.s^{-2} = \left[\frac{G.m^2}{d^2}\right] = [G] \times \frac{kg^2}{m^2} \Longrightarrow [G] = kg^{-1}.m^{-1}.s^{-2}$$

c. Faux. La valeur du rayon de l'orbite d'Europe est égale à $1{,}0.10^8$ m.

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M_S}, \text{ ainsi } R = \sqrt[3]{\frac{T^2 \times G \times M_S}{4 \times \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{3,6 \times 24 \times 3600 \times 6,67.10^{-11} \times 1,9.10^{27}}{4 \times \pi^2}} = 9,98.10^7 m \approx 1,0.10^8 m$$

d. Faux. Chaque satellite est soumis à plusieurs forces gravitationnelles : celle de Jupiter, mais aussi celle des autres satellites.

Exercice 2

a. Vrai. La vitesse de Callisto sur son orbite (considérée comme circulaire) est 8 128 $m.s^{-1}$. En effet :

$$V = \frac{2\pi \times R}{T} = \frac{2\pi \times 19.10^8}{17 \times 24 \times 3600} = 8128\ m.s^{-1}$$

b. Faux. La période de révolution de Ganymède sur son orbite est égale à 6,5 jours.

$$T = \sqrt{\frac{4.\pi^2 \times R^3}{G \times M_J}} = \sqrt{\frac{4.\pi^2 \times (11.10^8)^3}{6,67.10^{-11} \times 1,9.10^{27}}} = 643916 s \approx 7,4 jours$$

c. Faux. La force de gravitation exercée par Jupiter sur Io est égale à $3{,}3.10^{22}$ *N.*

$$F_{J \longrightarrow Io} = G.\frac{m_{Jupiter} \times m_{Io}}{r^2} = 6,67.10^{-11} \times \frac{1,9.10^{27} \times 4,8.10^{22}}{(4,2.10^8)^2} = 3,3.10^{22} N$$

d. Faux. La force exercée par Io sur Jupiter est égale à $3{,}3.10^{22}$ *N.*

Exercice 3

a. Vrai. Un satellite géostationnaire paraît immobile par rapport à un point fixe de la surface de la Terre.

b. Vrai. La vitesse de rotation du satellite autour de la Terre est $7{,}3.10^{-5}$ $rad.s^{-1}$.
En effet,

$$\omega : \text{vitesse de rotation} = \frac{2.\pi}{24 \times 3600} = 7,3.10^{-5} rad.s^{-1}$$

c. Faux. La vitesse de ce satellite est 4,9 km.s^{-1}.

$$V = \omega \times R = 7,3.10^{-5} \times (6380 + 400).10^3 = 4,9.10^3 m.s^{-1}$$

d. Faux. La masse du satellite géostationnaire n'intervient pas.

Exercice 4

a. Vrai. La distance entre la Terre et la comète est de 0,67 UA. En effet :

$120.10^6/150.10^6$ = **0,67 UA.**

b. Vrai. Rayon = (630 + 0,20)/2 = 315 UA.

Cette comète tourne autour du Soleil dont la masse est égale à M_S = **2,0.10^{30}** kg. En utilisant la troisième loi de Kepler, on trouve une période de révolution 5 600 ans. En effet :

$$T = \sqrt{\frac{4.\pi^2.R^3}{G.M_S}} = \sqrt{\frac{4.\pi^2 \times (315 \times 150.10^9)^3}{6,67.10^{-11} \times 2,0.10^{30}}} = 1,77.10^{11} s \approx 5600\ ans$$

d. Faux. D'après les calculs précédents, l'homme reverra cette comète dans 5 600 ans.

Exercice 5

a. Faux. La force gravitationnelle exercée par la Terre sur cette station est de 3,8.10^{6}N.

$$F_{Terre \mapsto station} = G.\frac{M_{Terre} \times m_{station}}{d^2} = 6,67.10^{-11} \times \frac{6,0.10^{24} \times 440.10^3}{(6380 + 400)^2.10^6} = 3,8.10^6 N$$

b. Faux. Son accélération est égale à 8,6 m.s^{-2}. En effet :

$$a = \frac{F}{m} = \frac{3,8.10^6}{440.10^3} = 8,6 m.s^{-2}$$

c. Faux. La vitesse de la station est égale à 770 m.s^{-1}.

$$V = \sqrt{a \times r} = \sqrt{8,6 \times (6380.10^3 + 440.10^3)} = 7630 m.s^{-1}$$

d. Faux. Sa période de révolution est d'environ 1h30.

$$T = \frac{2.\pi.r}{V} = \frac{2.\pi.(6380.10^3 + 400.10^3)}{7630} \approx 5600 s = 1,5 h.$$

Exercice 6

a. Vrai. Ce graphique montre qu'il y a proportionnalité entre a^3 et T^2. Le coefficient de proportionnalité est égal (voir cours) à :

$$\frac{4.\pi^2}{G.M_S}$$

Le coefficient directeur de cette droite est égal à 4,36.10$^{1\,!}$, ainsi l'on trouve M_S. Cela permet de déterminer la masse du Soleil.

$$\frac{4.\pi^2}{G.M_S} = \frac{1}{3,8.10^8} \Longrightarrow M_S = \frac{4.\pi^2 \times 4,36.10^{18}}{6,67.10^{-11}} = 2,6.10^{30} kg$$

b. Faux. Ce graphique ne me permet pas de déterminer la masse d'une des quatre planètes.

c. **Vrai** avec une erreur de 30 %.

d. Faux. On ne peut déterminer la masse de Mars avec ce graphique.

Exercice 7

a. Faux. Ce satellite a une orbite contenue dans le plan équatorial.

b. Faux. Compte tenu de la rotation de la Terre sur elle-même, sa période de révolution est légèrement inférieure à 24h00. Elle est de 23 h 56 min 04 s : c'est la période sidérale.

c. Vrai. Son altitude est de 36 000 km. En effet :

$$\frac{V^2}{(R+h)} = \frac{G.M_T}{(R+h)^2}, \text{ or } V = \frac{2\pi.(R+h)}{T}, \text{ donc } \frac{4.\pi^2.(R+h)^2}{T^2.(R+h)} = \frac{G.M_T}{(R+h)^2}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{G \times M_T \times T^2}{4.\pi^2}} - R = \sqrt[3]{\frac{6,67.10^{-11} \times 6,0.10^{24} \times (23 \times 3600 + 56 \times 60 + 4)^2}{4.\pi^2}} - 6380.10^3$$

$$h = 35800 kms \approx 36000 kms$$

d. Faux. Sa vitesse linéaire est plus grande est égale à celle d'un point périphérique de la Terre. En effet :

$$V_{(h)} = \frac{2.\pi \times (R+h)}{T} = \frac{2.\pi + (6380.10^3 + 36000.10^3)}{(23 \times 3600 + 56 \times 60 + 4)} = 3090\ m.s^{-1}$$

$$V_{(surface\ Teree)} = \frac{2.\pi \times (R+h)}{T} = \frac{2.\pi + (6380.10^3)}{(23 \times 3600 + 56 \times 60 + 4)} = 465\ m.s^{-1}$$



STATIQUE DES FLUIDES

Jefaislepointsurmesconnaissances

- Je sais ce qu'est une force et je connais l'unité de la force (Newton : N)
- Je sais ce qu'est la pression et je connais les unités de la pression (Pa ; bar ; mm de mercure ; atmosphère).
- Je connais la définition de la masse volumique.

$$\rho(kg.m^{-3}) = \frac{m(kg)}{V(m^3)}$$

La masse volumique est le rapport de la masse d'un solide, fluide ou gaz sur son volume.

- Je connais relation entre la force pressante exercée par un fluide sur une surface S et la pression :

$$p = \frac{F_{pressante}}{S}$$

P : Pascal (Pa) ; F : Newton (N) et S : surface (m^2).

- Je connais la poussée d'Archimède.

Un objet immergé dans un fluide subit une pression du fluide orienté de bas en haut. Il en découle une force orientée elle aussi de bas en haut. Cette force est égale au poids du volume d'eau déplacé par l'objet. C'est la poussée d'Archimède.

Je sais définir

- Je connais la loi de Boyle-Mariotte

À température et quantité de matière constantes, le produit de la pression d'un gaz par son volume est constant.

$$p \times V = constante$$

p(Pa) et V(m^3).

- Je sais que les particules constituant un liquide sont plus ordonnées que celles constituant un gaz.
- Je sais que les molécules ou les atomes d'un gaz ont un mouvement incessant et désordonné (chaos moléculaire ou atomique).
- Je connais l'origine de la pression d'un gaz ou d'un fluide sur une paroi. (C'est le choc incessant des particules constituant le liquide ou le gaz sur la paroi qui en est à l'origine).

❖ Je connais les différentes échelles et unités de la température.

– Échelle de température en degré Celsius (°C) : c'est une échelle arbitraire dont les deux repères sont la fusion de la glace à la pression atmosphérique (0°C) et l'ébullition de l'eau à la pression atmosphérique (100°C).

– Échelle de température en Fahrenheit (°F) est une unité de la température utilisée aux USA et en Grande Bretagne entre autres. Le point 0 est la température d'un mélange particulier de chlorure d'ammonium et d'eau et le point 96 correspond à la température du corps humain. Il existe une relation affine entre la température en (°C) et celle en (°F) :

$$T(°F) = \frac{9}{5}.T(°C) + 32$$

– Échelle de température absolue en Kelvin (K). Il existe une relation affine entre la température en (°C) et celle en Kelvin (K) :

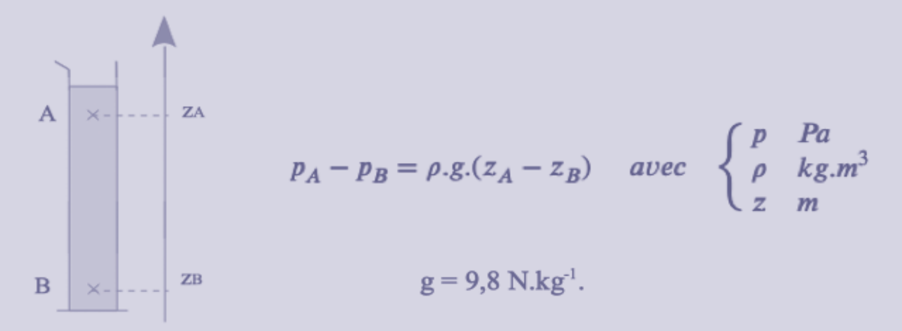
$$T(°C) = T(K) + 273,15$$

❖ Je sais que la température mesure l'agitation thermique des molécules ou atomes du fluide. Plus le fluide est agité, plus la température est élevée.

❖ Le 0K correspond au zéro absolu. À cette température (– 273,15°C), il y a absence totale de mouvement des molécules ou atomes.

❖ Je sais qu'un gaz est compressible alors qu'un liquide ne l'est quasiment pas.

❖ Je connais la relation fondamentale de la statique des fluids.



$$p_A - p_B = \rho.g.(z_A - z_B) \quad avec \begin{cases} p & Pa \\ \rho & kg.m^3 \\ z & m \end{cases}$$

$g = 9,8\ N.kg^{-1}$.

Je sais maîtriser

❖ Je sais utiliser la formule de la masse volumique pour calculer soit la masse, soit le volume, soit la masse volumique lorsque je connais les deux autres inconnues.

❖ Je sais utiliser la loi de Boyle Mariotte.

❖ Je sais dans quelles conditions je peux utiliser la loi de Boyle Mariotte.

❖ Je sais utiliser la loi de la statique des fluides.

ENTRAÎNEMENTS

PHYSIQUE

Exercice 1

Masse volumique

On verse de l'eau dans une éprouvette graduée de 250 mL jusqu'à la graduation 100. Après avoir pesé un morceau de métal, on le plonge ensuite un morceau de métal dans cette éprouvette graduée. Le liquide monte alors jusqu'à la graduation 125. La masse du métal est m = 196 g.
La précision de cette éprouvette graduée est de l'ordre du ½ mL.
Données :

	Fer	Aluminium	Zinc	Plomb
ρ: masse **volumique** **($kg.m^{-3}$)**	7 850	2 700	7 130	11 400

a. La masse volumique du métal est 7,84 $g.mL^{-1}$.
b. La masse volumique du métal est 784 $g.L^{-1}$.
c. La masse volumique du métal est 713 $kg.m^{-3}$.
d. Le métal est du zinc.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 2

Pression atmosphérique

La pression atmosphérique normale est égale à 101 325 Pa. Il règne cette pression dans une chambre d'étudiant. Cette chambre possède une fenêtre dont les dimensions sont 1,00 m sur 1,50 m.

a. La force exercée par l'air à l'intérieur de la chambre sur la fenêtre est égale à $1{,}52.10^{5}$ N.
b. La force exercée par l'air à l'extérieur de la chambre sur la fenêtre est supérieure à $1{,}52.10^{5}$ N.
c. La force exercée par l'air à l'extérieur de la chambre sur la fenêtre est inférieure à $1{,}52.10^{5}$ N.
d. La force exercée par l'air à l'extérieur de la chambre sur 1 cm^2 de la fenêtre est égale à 10,1 N.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 3

Loi de Boyle Mariotte

On dispose d'une seringue contenant une quantité de gaz qui restera constante tout au long de l'expérience. La température restera elle aussi constante. À l'état initial, on mesure une pression P_1 pour un volume de gaz V_1. Puis on retire le pistion de la seringue pour atteindre un volume V_2. La pression est alors P_2.

	État 1	État 2
Pression	P_1 = 1 000 hPa	P_2 = … hPa
Volume	V_1 = 50 mL	V_2 = 90 mL

a. 1 000 hPa est égal à $1{,}0.10^6$ Pa.
b. 1 000 hPa est égal à 0,1 bar.
c. Le Pascal (Pa) est l'unité légale de la pression.
d. La pression P_2 = 556 hPa.

V F
a ▢ ▢
b ▢ ▢
c ▢ ▢
d ▢ ▢

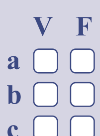


Exercice 4

Bouteille de butane

Données : constante des gaz parfaits : R = 8,314 U.S.I
Une bouteille de gaz butane, utilisée dans une habitation, contient 13 kg de gaz liquéfié. La masse molaire du butane est égale à 58 $g.mol^{-1}$. La masse volumique du butane liquide est égal à 601 $g.L^{-1}$.

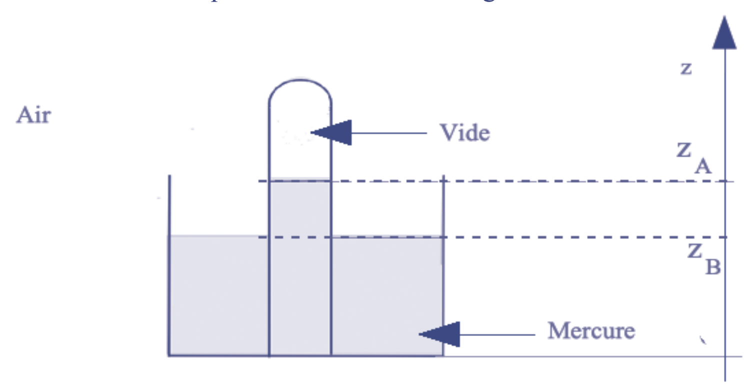
a. La quantité de matière de gaz contenu dans la bouteille est égale à 0,224 mol.
b. Le volume d'une mole de gaz butane à la pression de 1,0 bar et à la température de 298K est égal à 24,8 $L.mol^{-1}$.
c. Le volume de butane liquide dans la bouteille est égal à 216 L.
d. Dans les conditions énoncées, le volume des 13 kg de butane gazeux est $5{,}56.10^3$L.



Exercice 5

Tube de Toricelli

Données : masse volumique du mercure 13 600 $kg.m^{-3}$.



a. La pression du vide est égale à la pression atmosphérique.
b. La pression de l'air est égale à la pression atmosphérique.
c. La relation fondamentale de la statique s'écrit :
$p(z_B) - p(z_A) = \rho \times g \times h$ où $h = z_A - z_B$
d. L'altitude h = 76 cm de mercure.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

PHYSIQUE

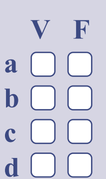
Exercice 6

Hémisphères de Magdebourg



Ce petit appareil consiste en deux hémisphères creux, de laiton. Leurs bords sont garnis d'une rondelle annulaire de cuir, enduite de suif, qui rend la fermeture hermétique lorsque ses bords sont en contact. L'un des hémisphères porte un robinet qui se visse sur la machine pneumatique, et l'autre un anneau qui sert de poignée pour le saisir et le tirer.
Tant que les hémisphères contiennent de l'air, on les sépare sans difficulté, car il y a équilibre entre la force élastique de l'air intérieur et la pression atmosphérique. Mais une fois vide d'air, on ne peut plus les séparer.
« Lors de l'expérience historique réalisée en 1654 dans la ville allemande de Magdebourg, Otto Von Guéricke, scientifique et inventeur qui en était le bourgmestre, utilisa des hémisphères d'un diamètre de plus de 60 cm. On rapporte, dans certains ouvrages, qu'il fallut seize chevaux répartis en deux attelages tirant en sens opposé pour les séparer. Les auteurs les plus modérés parlent de six chevaux en tout… »
http://www.lecompendium.com/dossier_meca_24_hemispheres_de_magdebourg/hemispheres_de_magdebourg.htm

a. La force exercée sur un hémisphère, permettant de vaincre la pression atmosphérique sur les hémisphères de Margdebourg est de $2{,}86.10^4$ N.
b. La force exercée sur un hémisphère, permettant de vaincre la pression atmosphérique sur les hémisphères de Margdebourg est de $5{,}73.10^4$ N.
c. La force exercée sur un hémisphère, permettant de vaincre la pression atmosphérique sur les hémisphères de Margdebourg est de $1{,}14.10^5$ N.
d. La force exercée sur un hémisphère, permettant de vaincre la pression atmosphérique sur les hémisphères de Margdebourg permettrait de soulever 11,7 tonnes.

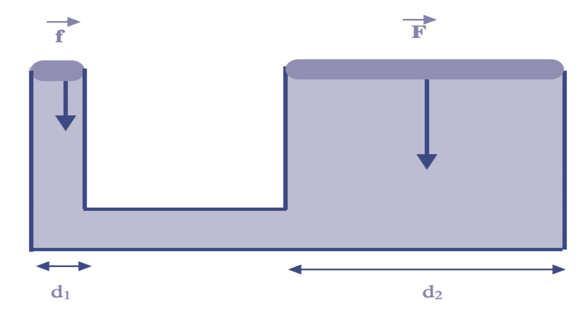


	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 7

Démultiplication des forces

Une presse hydraulique est constituée de deux pistons de diamètres différents. Le grand diamètre "d_2" vaut 16 cm et le petit "d_1" vaut 2 cm. Le liquide présent est de l'huile.



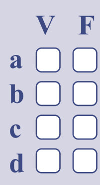
a. La relation entre F,f, d_1 et d_2 est :

$$\frac{f}{F} = \frac{d_1}{d_2}$$

b. On applique une force f = 10 N sur le petit piston, le grand piston pourra soulever un poids de 10 N.

c. On applique une force f = 10 N sur le petit piston, le grand piston pourra soulever une masse de 65 kg.

d. On utilise cette presse de la manière suivante ; on applique une force f sur le petit piston pour pouvoir soulever un poids important au niveau du deuxième piston.



Exercice 8

La plongée

Lors d'une séance de plongée, la pression de l'air à l'intérieur des poumons ne doit pas dépasser une surpression de 3.104 Pa par rapport à la pression ambiante. Au-delà de cette valeur, les alvéoles pulmonaires se déchirent. Un plongeur, à 10,0 m de profondeur, décide de remonter à la surface tout en bloquant sa respiration.

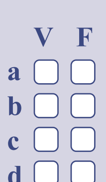
Données : on considérera que le volume pulmonaire reste constant. $\rho_{\text{eau salée}}$ = 1 010 kg.m^{-3} ; $\boldsymbol{g}$ = 9,8 N.kg^{-1}. ; $\boldsymbol{P}_{atm}$ = 1,01.10^5 Pa.

a. La pression de l'eau à une profondeur de 4,0 m est de 1,4.10^5 Pa.

b. La pression de l'air inspirée par le plongeur est de 1,01.10^5 Pa.

c. La surpression maximale tolérée par les poumons n'est pas dépassée.

d. La surpression maximale tolérée par les poumons n'est pas dépassée et le plongeur est en danger.



CORRIGÉS

PHYSIQUE

Exercice 1

a. Vrai. La masse volumique du métal est 7,84 g.mL^{-1}. En effet, le volume du métal est égal à 25 mL. Sa masse est égale à 196 g. Sa masse volumique est donc égale à 196/25 = 7,84 g.mL^{-1}, soit 7,84 kg.L^{-1}, soit 7 840 g.L^{-1} et enfin 7 840 kg.m^{-3}.

b. Faux.

c. Faux.

d. Faux. Le métal est du fer.

Exercice 2

a. Vrai. La force exercée par l'air à l'intérieur de la chambre sur la fenêtre est telle que :

$$F = p \times S = 101325 \times 1,5 \times 1,0 = 1,52.10^5 N$$

b. Faux. Les forces intérieure et extérieure se neutralisent. Elles sont donc égales.

c. Faux. Voir réponse précédente.

d. Vrai. En effet :

$$F = p \times S = 101325 \times 0,0001 = 10,1 N$$

Exercice 3

a. Faux. 1 000 hPa est égal à 1,0.10^5 Pa.

b. Vrai.

c. Vrai.

d. Vrai. On utilise la loi de Boyle Mariotte puisque la température et la quantité de matière contenue dans la seringue restent constantes.

	État 1	État 2
Pression	P_1 = 1 000 hPa	$P_2 = P_1.V_1/V_2$ = 556hPa
Volume	V_1 = 50 mL	V_2 = 90 mL
	$P_1.V_1 = P_2.V_2$	

La pression P_2 = 556 hPa.

Exercice 4

a. Faux. La quantité de matière de gaz contenue dans la bouteille est égale à 224 mol.

b. Vrai. On utilise la loi des gaz parfaits :

$$p(Pa) \times V(m^3) = n(mol) \times R \times T(K) \ \ avec\ R = 8,314\ U.S.I$$

$$V_{molaire} = \frac{n \times R \times T}{p} = \frac{1 \times 8,314 \times 298}{1,0.10^5} = 24,8.10^{-3} m^3.mol^{-1} = 24,8 L.mol^{-1}$$

Le volume d'une mole de gaz butane à la pression de 1,0 bar et à la température de 298K est égal à 24,8 $L.mol^{-1}$.

c. Faux. Le volume de butane liquide dans la bouteille est égal à 21,6 L. En effet :

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{13000g}{601g.L^{-1}} = 21,6L$$

d. Vrai. Le volume des 13 kg de butane gazeux est $5,56.10^3$ L. En effet :

$$V = n \times V_{molaire} = 224 \times 24,8 = 5,56.10^3 L$$

Exercice 5

a. Faux. La pression du vide est égale à 0 Pa.

b. Vrai. La pression de l'air est égale à la pression atmosphérique.

c. Faux. La relation fondamentale de la statique s'écrit :

$$p(z_A) - p(z_B) = \rho \times g \times (z_A - z_B) = \rho \times g \times h \ avec\ h = z_A - z_B$$

d. Vrai. L'altitude h = 76 cm de mercure. En effet :

$$h = \frac{p(z_A) - p(z_B)}{\rho \times g} = \frac{101325}{13600 \times 9,81} = 0,76m \ soit\ 76\ cm$$

Exercice 6

a. Faux. La force permettant de vaincre la pression atmosphérique s'exerce sur les deux hémisphères. Je calcule tout d'abord la surface d'une demi-sphère :

$$S_{demi\text{-}sphère} = 4.\pi.R^2 = 4.\pi.(0,30)^2 = 1,13m^2$$

Je calcule ensuite la force appliquée à cette surface par l'air extérieur :

$$F_{air \rightarrow demi\text{-}sphère} = p \times S = 101325 \times 1,13 = 1,14.10^5\ N$$

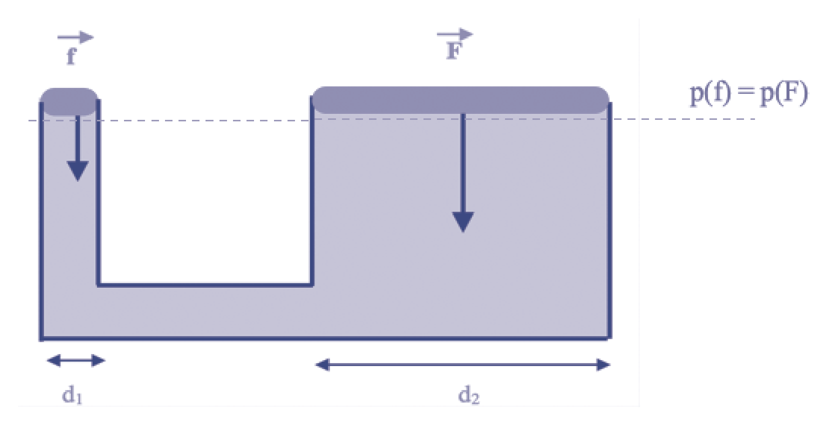
b. Faux. Voir réponse précédente.

c. Vrai. Voir réponse précédente.

d. Vrai. La force permettant de vaincre la pression atmosphérique permettrait de soulever 11,7 tonnes. En effet :

$$P(N) = m(kg) \times g = F \Longrightarrow m = \frac{F}{g} = \frac{1,14.10^5}{9,81} = 11683\ kg \approx 11,7\ tonnes$$

Exercice 7



a. Faux. La relation entre F,f, d_1 et d_2 est :
La pression dans le liquide est la même sur une même horizontale. p(f) = p(F), ainsi :

$$\frac{f}{S_1} = \frac{F}{S_2} \Longrightarrow \frac{f}{4.\pi.\left(\frac{d_1}{2}\right)^2} = \frac{F}{4.\pi.\left(\frac{d_2}{2}\right)^2} \Longrightarrow \frac{f}{F} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

b. Faux. On applique une force f = 10 N sur le petit piston, le grand piston pourra soulever un poids de 640 N.

c. Vrai. F = 640 N, donc m = F/g = 640/9,81 = 63 kg.

d. Vrai.

Exercice 8

a. Vrai. La pression de l'eau à une profondeur de 4,0 m est de $1,4.10^5$ Pa. En effet :

$$p_A - p_B = \rho \times g \times (z_A - z_B) \Longrightarrow p_B = p(4,0\ m) = p_A + \rho \times g \times (z_A - z_B)$$

$$p_B = p(4,0\ m) = 1,01.10^5 + 1010 \times 9,81 \times 4 = 1,4.10^5\ Pa$$

b. Faux. Elle est égale à la pression extérieure, soit $1,4.10^5$ Pa.

c. Faux. La surpression maximale tolérée par les poumons n'est pas dépassée.

d. Vrai. Voir réponse précédente.

Chapitre6

DYNAMIQUE DES FLUIDES

Jefaislepointsurmesconnaissances

❖ Je sais ce que sont l'état liquide et l'état gazeux.

❖ Je connais les propriétés des gaz (occupe tout l'espace qui lui est disponible, compressible).

❖ Je connais les propriétés des liquides (déformable, possède un volume propre et incompressible).

❖ Je connais le phénomène physique de la poussée d'Archimède.

❖ Je connais la loi fondamentale de la statique des fluides. (chapitre précédent).

❖ Je connais la définition de la masse volumique. (chapitre précédent).

❖ Je sais comment évolue la pression en fonction de la profondeur de l'eau. (chapitre précédent).

❖ Je connais la première loi de Newton relative à l'équilibre statique d'un corps.

La somme des forces extérieures appliquées à un solide en équilibre statique (immobile ou se déplaçant en mouvement rectiligne et uniforme) est égale au vecteur nul.

Je sais définir

❖ Je sais définir un fluide parfait.

Un fluide parfait est un fluide non visqueux dans lequel les forces de frottements sont négligées.

❖ Je sais définir la poussée d'Archimède.

Un objet immergé dans un fluide subit une pression du fluide orienté de bas en haut. Il en découle une force orientée elle aussi de bas en haut. Cette force est égale au poids du volume d'eau déplacé par l'objet. C'est la poussée d'Archimède notée P_{Ar}.

$$\vec{P}_{Ar} = m_{fluide}(kg) \times V_{eau\ déplacée}(m^3) \times \vec{g}$$

❖ Je sais où s'applique la poussée d'Archimède sur un corps immergé totalement (centre de gravité du corps) ou partiellement (centre de gravité de la partie immergée du corps).

❖ Je sais que ce point s'appelle le centre de poussée et est noté C.

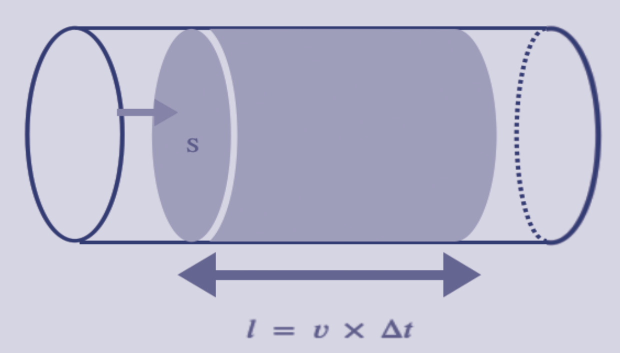
❖ Je sais ce qu'est un écoulement stationnaire. (Vitesse d'écoulement et pression sont indépendantes du temps).

❖ Lorsqu'un solide est immergé et immobile dans le liquide, alors le poids et la poussée d'Archimède se neutralisent.

$$\vec{P} + \vec{P}_{Ar} = \vec{0}$$

❖ Je sais que définir le débit volumique d'un fluide.

Le débit volumique est le volume de fluide qui s'écoule par unité de temps à travers une section droite.



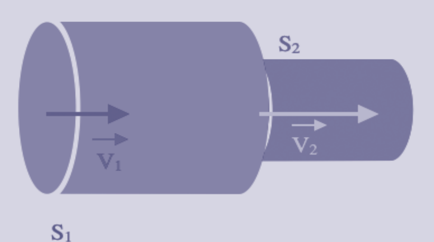
$$l = v \times \Delta t$$

$$D_{volumique} = \frac{Volume\ de\ fluide\ passant\ à\ travers\ la\ surface\ S(m^3)}{durée\ de\ la\ traverse\ (s)} = \frac{S \times l}{\Delta t} = S \times \frac{l}{\Delta t} = S \times v$$

Les unités (v : $m.s^{-1}$; l(m) ; S : section (m^2) ; Dv : $m^3.s^{-1}$)

❖ Je sais que les particules constituant le liquide sont plus ordonnées que celles constitant un gaz.

❖ Je sais que lors de l'écoulement d'un fluide dans une conduite de section variable, le principe fondamental de conservation de la masse entraîne inévitablement la conservation du débit volumique lorsque le fluide est incompressible (masse volumique constante). Cela se traduit de la manière suivante :



La conservation du débit se traduit par la relation suivante :

$$D_{volumique} = constante = S_1 \times V_1 = S_2 \times V_2$$

$$\begin{cases} S & m^2 \\ V & m.s^{-1} \end{cases}$$

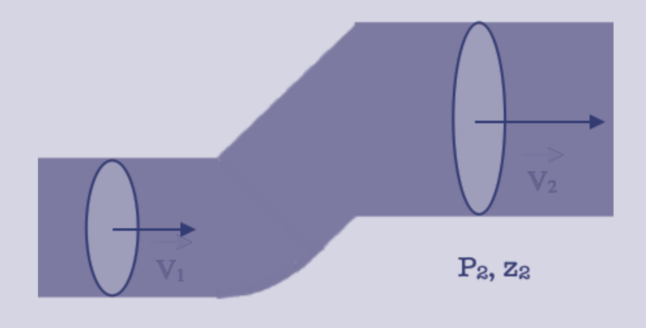
❖ Je sais que dans un champ de pesanteur uniforme, pour un fluide parfait, incompressible et homogène et non tourbillonnaire en régime permanent, le principe fondamental de la dynamique pour un fluide (2e loi de Newton) entraîne :

$$\frac{1}{2}\rho.V^2 + \rho.g.z + p = constante$$

C'est la relation de Bernouilli.

❖ Je sais que dans la conduite suivante, cela se traduit par :

$$\frac{1}{2}\rho.V_1^2 + \rho.g.z_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho.V_2^2 + \rho.g.z_2 + p_2$$



❖ Je connais l'effet Venturi. Cet effet se traduit par une accélération du fluide au niveau de l'étranglement d'une conduite.

Je sais maîtriser

❖ Je sais utiliser le principe d'Archimède.

❖ Je sais utiliser la relation $S_1.V_1 = S_1.V_2$ lors de l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait, incompressible et non tourbillonnaire.

❖ Je sais utiliser la relation de Bernouilli.

❖ Je sais dans quelles conditions je peux utiliser la relation de Bernouiili.

ENTRAÎNEMENTS

PHYSIQUE

Exercice 1

a. La force d'Archimède sur un corps immergé ne dépend pas de la nature du liquide.

b. La Poussée d'Archimède est une force verticale descendante.

c. Plus le volume d'un objet est grand, plus la poussée d'archimède est importante.

d. Lorsque le volume est suffisamment grand, la poussée d'Archimède est alors supérieure au poids de l'objet immergé.

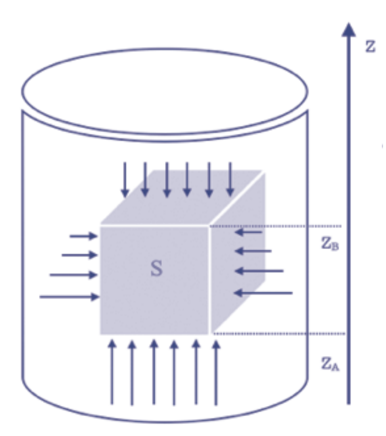
	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Énoncé commun aux exercices 2 et 3.

Exercice 2

Approche du théorème d'Archimède 1

Le corps S est totalement immergé dans un fluide de masse volumique ρ. Voir schéma ci-dessous.



a. Les pressions sur les faces latérales s'annulent.

b. Les pressions sur la face du haut du cube et celle du bas se compensent.

c. Dans cette situation, la relation de la statique des fluides s'écrit :

$$p(z_A) - p(z_B) = \rho_{fluide} \times g \times (z_A - z_B)$$

d. Le cube est immergé et est en équilibre dans le liquide. La deuxième loi de Newton s'écrit :

$$-p(z_A) \times S_{face} + p(z_B) \times S_{face} - m_{cube} \times g = 0$$

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 3

Approche du théorème d'Archimède 2

a. En se servant de la deuxième de Newton et de la relation fondamentale de la statique des fluides, on montre que la **relation suivante (3)**

$$\rho_{fluide} \times g \times (z_A - z_B) \times S_{face} - m_{cube} \times g = 0$$

b. Le volume immergé est égal à :

$$V_{immerge} = S_{face} \times (z_B - z_A)$$

c. La relation (3) (corrigée ou pas) devient :

$$\rho_{cube} \times g \times V_{immerge} - m_{cube} \times g = 0$$

d. La poussée d'Archimède (ou force d'Archimède) s'applique toujours au centre de l'objet.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 4

Ballon non totalement immergé

Un ballon flotte à la surface de l'eau. Il est immergé au 2/3 de son volume. Son rayon R = 25 cm.

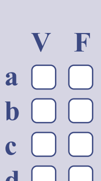
Données : masse volumique de l'eau 1 000 kg.m^{-3}. g = 9,81 N.kg^{-1}.

a. La poussée d'Archimède est égale à 427 N.

b. La poussée d'Archimède est égale à 641 N.

c. Son poids est égal à 427 N.

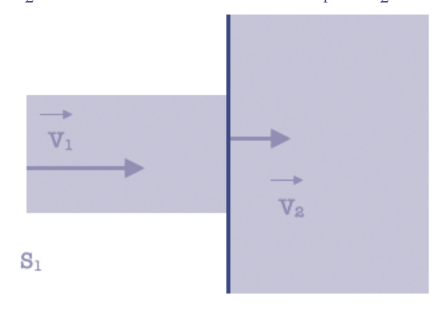
d. Son poids est égal à 641 N.



Exercice 5

Conduite d'eau

On considère une conduite cylindrique (figure ci-dessous). Le petit diamètre D_1 vaut 10 mm et le grand diamètre D_2 vaut 20 mm. Le débit volumique d'eau D_{V1} circulant dans cette conduite est 10 L/min. On souhaite alors connaître le débit volumique D_{V2}. Le liquide est parfait et incompressible. L'écoulement est stationnaire. d_1/d_2 = ½. (d_1 et d_2 diamètres respectifs de S_1 et S_2).



a. Le débit $D_{V2} = 0{,}17\ L.s^{-1}$.
b. La vitesse V_1 est quatre fois plus grande que V_2.
c. La vitesse V_1 est deux fois plus grande que V_2.
d. La vitesse V_1 est deux fois plus petite que V_2.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

PHYSIQUE

Exercice 6

Cuve à eau

On utilise une cuve verticale (voir schéma ci-dessous) remplie d'eau ; on supposera que le niveau A dans la cuve est reste inchangé. Le fluide s'écoule par un trou de diamètre d situé dans le fond de la cuve. L'eau sera considérée comme un fluide parfait incompressible.
Données : h = 0,82 m ; $\rho_{eau} = 1\ 000\ kg.m^{-3}$; d = 2,0 cm.

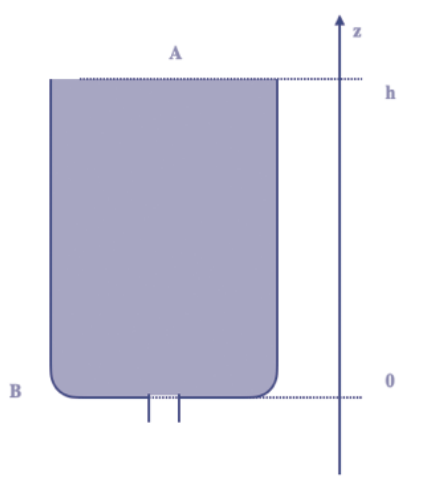
a. Avec les données de l'exercices, la vitesse au point B a pour expression :

$$V_B = \sqrt{g.h}$$

b. La valeur de la vitesse en B est égale à $3{,}8\ ml.s^{-1}$.
c. Le débit volumique en B a pour expression :

$$D_{V_B} = V_B \times S_B = V_B \times \pi \times \frac{d^2}{4}$$

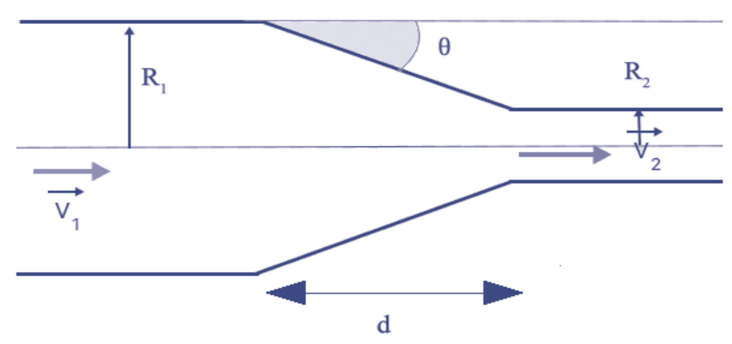
d. La valeur du débit volumique en B est $0{,}89\ L.s^{-1}$



Exercice 7

Accélération dans une conduite

On veut accélérer la circulation d'un fluide parfait dans une conduite de telle sorte que sa vitesse soit multipliée par 4. Pour cela, la conduite comporte un cône caractérisé par l'angle θ (schéma ci-dessous).



Données : R_1 = 20 cm θ = 10°.

a. Le rapport des rayons $R_1/R_2 = 4$.

b. $R_1 - R_2 = d.\sin\theta = d.\sin 10$.

c. d = 86 cm.

d. R_2 = 15,5 cm.



Énoncé commun aux exercices 7 et 8.

De l'huile est accélérée à travers une buse en forme de cône convergent. La buse est équipée d'un manomètre en forme de U qui contient du mercure.

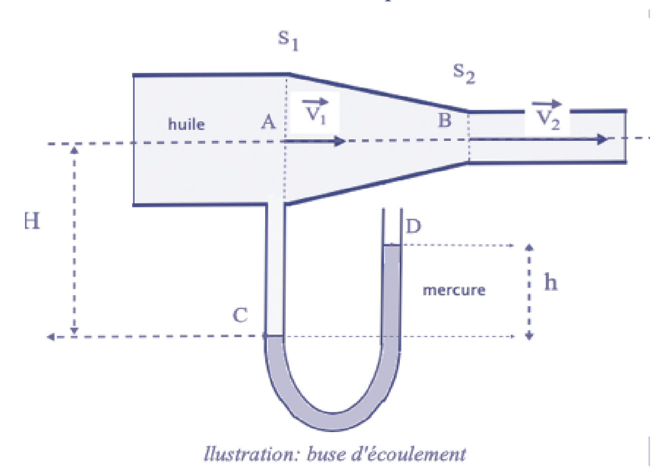


Illustration: buse d'écoulement

Exercice 8

Le débit volumique en A est D_{v1} = 30 L.min^{-1}. L'huile traverse la section S_1 de diamètre d_1 = 10 mm à une vitesse d'écoulement V_1, à une pression P_1 et sort vers l'atmosphère par la section S_2 de diamètre d_2 à une vitesse d'écoulement $V_2 = 3.V_1$ et avec une pression P_2 en B. On considère qu'il s'agit d'un écoulement en régime permanent.

On donne la masse volumique de l'huile : ρ_{huile} = 800 kg.m^{-3}. Masse volumique du mercure 13 600 kg.m^{-3}.

a. Un fluide est dit parfait s'il n'y a pas de frottement au cours de son écoulement.

b. La vitesse d'écoulement V_A est égale à 382 m.s^{-1}.

c. La vitesse d'écoulement V_A est égale à 6,37 m.s^{-1}.

d. d_2 = 3,3 mm.

V F
a ☐ ☐
b ☐ ☐
c ☐ ☐
d ☐ ☐

Exercice 9

Données : H = 2 200 mm. Masse volumique du mercure 13 600 kg.m^{-3}.

a. L'expression de la pression en A est :

$$p_A = \frac{1}{2}\rho_{huile}.(V_B^2 - V_A^2)$$

b. La valeur de la pression en A est 2,30.10^5 Pa.

c. La pression en C est 3,9.10^5 Pa.

d. h = 1 125 mm.

V F
a ☐ ☐
b ☐ ☐
c ☐ ☐
d ☐ ☐

CORRIGÉS

Exercice 1

a. Faux. Elle dépend entre autres de la masse volumique du liquide.

b. Faux. C'est une force verticale ascendante.

c. Vrai. Il dépend du volume d'eau déplacé, donc du volume de l'objet immergé.

d. Faux. Tout dépend si l'objet est totalement immergé ou pas.

Exercice 2

a. Vrai.

b. Faux. La pression sur la face du bas est supérieure à la pression de la face du haut.

c. Vrai. Voir cours.

d. Faux. Attention au sens des forces, le poids est vertical vers le bas, la force de pression en A est verticale vers le haut et la force de pression en B est verticale vers le bas :

$$p(z_A).S_{face} - p(z_B).S_{face} - m.g = 0$$

Exercice 3

a. Vrai. Voir cours.

b. Vrai.

c. Faux. Il faut remplacer la masse volumique du cube par celle du liquide.

d. Faux. La poussée d'Archimède (ou force d'Archimède) s'applique au centre de poussée C de l'objet immergé. Il correspond au centre de gravité de la partie immergée de l'objet.

Exercice 4

a. Vrai.

$$P_{Ar} = \rho_{eau} \times g \times V_{immerge} = 1000 \times 9,8 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \pi \times (0,25)^3 = 427N$$

b. Faux. Voir réponse précédente.

c. Vrai. Le ballon est en équilibre, donc le poids est composé par la poussée d'Archimède. Donc $P = P_{Ar} = 427$ N.

d. Faux. Voir réponse précédente.

Exercice 5

a. Vrai. Le débit est conservé, ainsi $D_{v1} = D_{v2} = 10/60 = 0{,}17$ L.s^{-1}.

b. Vrai. La vitesse V_1 est quatre fois plus grande que V_2.

$$S_1 \times V_1 = S_1 \times V_2 \Longrightarrow V_1 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \times V_2 = \left(\frac{20}{10}\right)^2 \times V_1 = 4.V_1$$

c. Faux. Voir réponse précédente.

d. Faux. Voir réponse précédente.

Exercice 6

a. Faux. On utilise la relation de Bernouilli entre les points A et B.

$$\frac{1}{2}\rho_{eau} \times V_A^2 + \rho_{eau} \times g \times z_A + p_A = \frac{1}{2}\rho_{eau} V_B^2 + \rho_{eau} \times g \times z_B + p_B$$

On a $V_A = 0$, $p_A = p_B = p_{atm}$. Ainsi,

$$\frac{1}{2}\rho_{eau} \times V_B^2 = \rho_{eau} \times g \times (z_A - z_B)$$

soit

$$V_B = \sqrt{2 \times g(z_A - z_B)} = \sqrt{2 \times g \times h}$$

b. Faux. En faisant l'application numérique on trouve $V_B = 4{,}0$ m.s^{-1}.

c. Vrai.

d. Faux. La valeur du débit volumique en B est $1{,}26.10^{-3}$ m^3.s^{-1} = 1,26 L.s^{-1}.

Exercice 7

a. Faux. En effet, la conservation du débit entraîne

$$S_1 \times V_1 = S_2 \times V_2 \Longrightarrow V_1 = \left(\frac{S_2}{S_1}\right) \times V_2 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2}$$

Donc $R_2/R_1 = 0{,}5$.

b. Vrai. $R_1 - R_2 = d.\sin\theta = d.\sin 10$.

c. Faux. d = 58 cm.

$$R_1 - R_2 = R_1 - 0,5.R_1 = 0,5.R_1 = d.sin\theta \Longrightarrow d = \frac{0,5.R_1}{sin\theta} = \frac{0,5 \times 20}{sin10} = 58cm$$

d. Faux. $R_2 = 10$ cm.

Exercice 8

a. Faux. C'est une condition nécessaire mais non suffisante.

$$D_{v_1} = S_1 \times V_1 \Longrightarrow V_1 = \frac{D_{v_1}}{S_1} = \frac{D_{v_1}}{\pi \times R_1^2} = \frac{\frac{30.10^{-3}}{60}}{\pi \times (0,005)^2} = 6,37\ m.s^{-1}$$

b. Faux.

c. Vrai.

d. Faux. Le débit est conservé.

$$D_{v_1} = S_1 \times V_1 = S_2 \times V_2 \Longrightarrow S_2 = \frac{D_{v_2}}{V_2} = \frac{\frac{30.10^{-3}}{60}}{3 \times 6,37} = 2,60.10^{-5}\ m^2$$

$$D_{v_1} = S_2 \times V_2 \Longrightarrow R_2 = \sqrt{\frac{D_{v_2}}{\pi}} = \sqrt{\frac{2,60.10^{-5}}{\pi}} = 2,88.10^{-3} m \approx 2,9 mm$$

soit d_2 = 5,8 mm.

Exercice 9

a. Faux.

$p_B = p_{atm}$ et $z_A = z_B$ alors, la relation de Bernouilli nous permet d'écrire L'expression de la pression en A est :

$$p_A = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho_{huile} \times (V_B^2 - V_A^2)$$

b. Vrai. La valeur de la pression en A est $2,30.10^5$ Pa.

c. Faux. La pression en C est $2,5.10^5$ Pa.

d. Vrai. h = 1 125 mm. On utilise la relation de la statique des fluides.

Chapitre 7

OPTIQUE

Je fais le point sur mes connaissances

- ❖ Je sais que dans un milieu homogène et translucide, la lumière se propage en ligne droite.
- ❖ Je sais que la lumière est une onde électromagnétique dont la longueur d'onde est comprise en 380 nm (violet) et 780 nm (rouge).
- ❖ Je connais et je sais expliquer les phénomènes de réflexion et de réfraction.
- ❖ Je connais la vitesse de la lumière dans le vide $c = 3{,}00.10^{8}\ m.s^{-1}$.
- ❖ Je sais ce qu'est l'indice de réfraction d'un milieu et qu'il est noté n.
- ❖ Je sais que lorsque $n_1 < n_2$, alors le rayon réfracté se rapproche de la normale.
- ❖ Je sais que lorsque $n_1 > n_2$, alors le rayon réfracté s'éloigne de la normale.
- ❖ Je sais que lorsque $n_1 > n_2$, alors il existe un angle limite de réfraction.
- ❖ Je connais la structure d'une fibre otique.

gaine
Cœur
gaine

- ❖ Je sais ce qu'est une fibre optique et je connais son principe de fonctionnement.
- ❖ Je connais quelques applications de la fibre optique (télécommunication, médecine…).
- ❖ Je sais reconnaître une lentille convergente.
- ❖ Je sais différencier une lentille convergente d'une lentille divergente.
- ❖ Je sais ce qu'est la distance focale f d'une lentille.
- ❖ Je sais placer les foyers objet et image F et F' d'une lentille convergente ou divergente.
- ❖ Je sais ce qu'est la vergence d'une lentille.



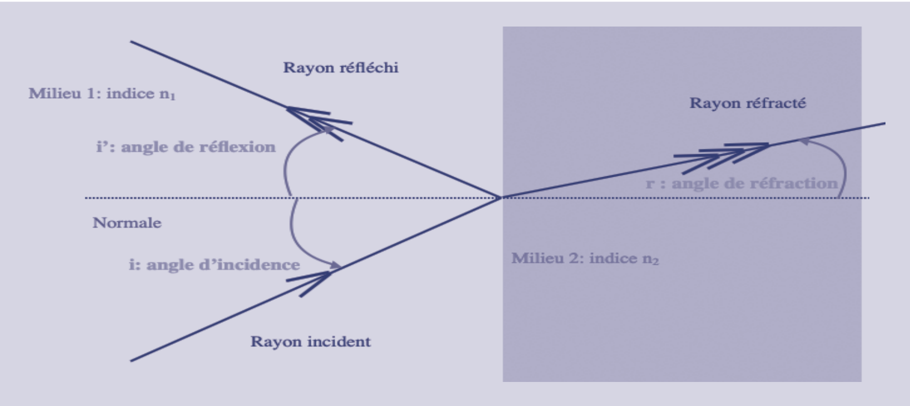
Je sais définir

- ❖ Je sais définir l'indice de réfraction de la lumière n.

$$n(\text{sans unité}) = c(m.s^{-1})/v(m.s^{-1})$$

c(vitesse de la lumière dans le vide) et v(vitesse de la lumière dans le milieu considéré

- ❖ Je connais les lois de Descartes pour la réflexion et pour la réfraction.



Lois de la réflexion

Les rayons incidents et réfléchis se trouvent dans un même plan : le plan d'incidence.

L'angle d'incidence i est égal à l'angle de réflexion i' : i = i'.

Lois de la réfraction

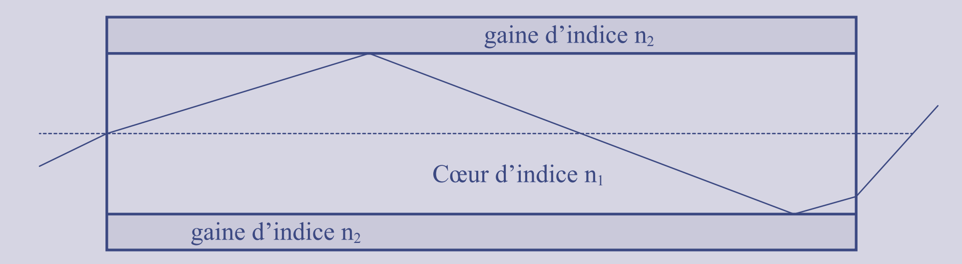
Les rayons incidents et réfractés se trouvent dans un même plan : le plan d'incidence.

L'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r sont lié par la relation :

$$n_1.\sin i = n_2.\sin r.$$

❖ Lorsque $n_1 > n_2$, l'angle limite de réfraction est égale à $i_{lim} = \arcsin(n_2/n_1)$.

❖ Je sais comment doit se propager la lumière dans une fibre optique afin que le signal soit intégralement transmis.



❖ Je connais la relation de conjugaison pour une lentille avec origine au centre de cette dernière.

$$\frac{1}{\overline{OA'}(m)} - \frac{1}{\overline{OA}(m)} = \frac{1}{\overline{OF'}(m)} = \frac{1}{f'(m)}$$

❖ Je connais la formule du grandissement d'une lentille pour une lentille.

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

❖ Le grandissement n'a pas d'unité.

❖ Je sais qu'une lunette astronomique est constituée d'un oculaire et d'un objectif.

❖ Je sais que l'oculaire a une courte distance focale et donc une grande vergence.

❖ Je sais que l'objectif a une grande distance focale et donc une faible vergence.

❖ Je sais que la lunette afocale est constituée de deux lentilles convergentes de distances focales respectives f'_1 et f'_2.

❖ Je sais que la lunette afocale est telle que les foyers F_1' et F_2 sont confondus sur l'axe optique.

❖ Je connais le grossissement d'une lunette astronomique :

$$G = \frac{f'_1}{f'_2}$$

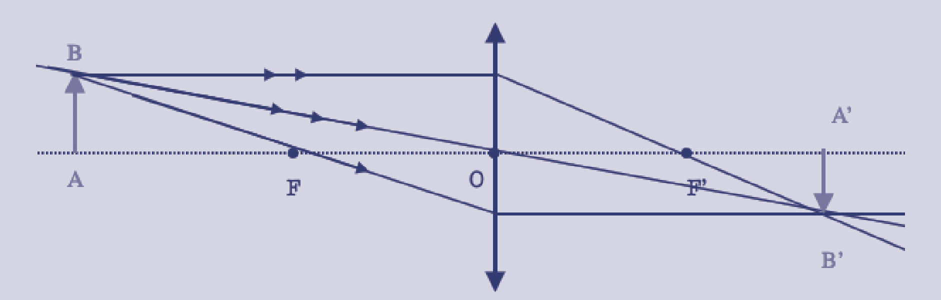
❖ Je sais définir le diamètre apparent d'un objet :

C'est l'angle α sous lequel est vu un objet sans lentille.

Je sais maîtriser

❖ Je sais maîtriser la construction en optique.

– Tout rayon passant par le centre de la lentille n'est pas dévié.
– Tout rayon passant par le foyer objet F émerge en restant parallèle à l'axe optique.
– Tout rayon incident parallèle à l'axe optique émerge en passant par le foyer image F' de la lentille.



❖ Connaissant la formule de la vergence, je sais calculer la distance focale et réciproquement.

❖ Je sais utiliser la relation de conjugaison pour une lentille.

❖ Je sais utiliser la relation du grandissement de l'image.

❖ Je sais réaliser une construction pour une lunette astronomique.

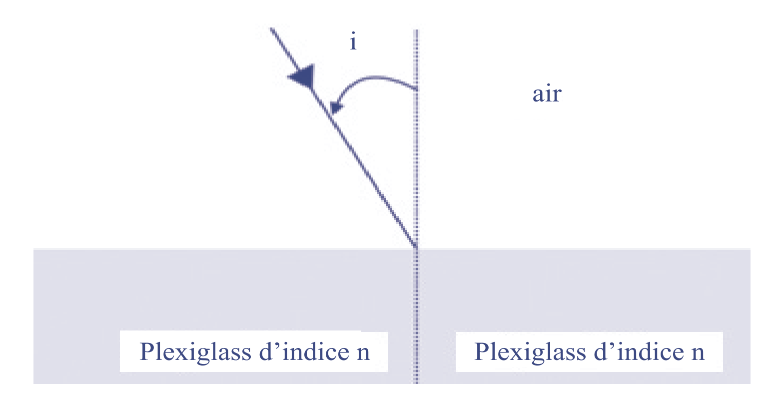
❖ Je sais utiliser la formule du grossissement pour une lunette astronomique.

ENTRAÎNEMENTS

PHYSIQUE

Exercice 1

Réfraction



Un rayon lumineux issu d'une source laser se propage dans l'air et vient frapper la surface d'un plan en plexiglas avec un angle d'incidence i = 30°. L'indice du plexiglas est n = 1,51.

a. La réfraction est une déviation de la lumière qui entraîne toujours un rapprochement du rayon lumineux vers l'axe optique.

b. Le phénomène de réflexion sur une surface est toujours entraîné par un phénomène de réfraction.

c. Le rayon incident donne naissance à un rayon réfléchi et un rayon réfracté faisant un angle r = 15°.

d. La lumière se propage dans le plexiglas avec une vitesse de $2{,}0.10^{8}$ $m.s^{-1}$.

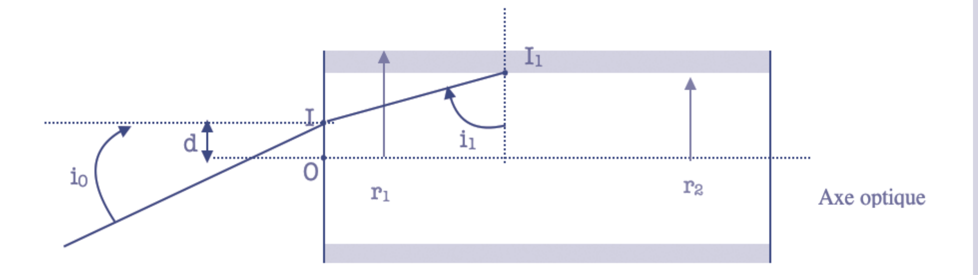
	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 2

Fibre optique

Pour guider la lumière dans une direction donnée, on utilise des fibres optiques, longs fils cylindriques dont l'indice diminue quand on s'éloigne de l'axe. La lumière incidente a une direction très proche de l'axe optique. Le cœur de la fibre de rayon r_1 a un indice n_1 = 1, 510. Il est entouré d'une gaine de rayon extérieur r_2, d'indice n_2 = 1,495. La longueur de la fibre L = 1 km.

Un rayon incident se propage dans l'air dans un plan axial de la fibre et arrive en un point que l'on notera I, à une distance d de l'axe avec d < r_1 d, sur une extrémité de la fibre, sous un angle d'incidence i_0. On note i_1 l'angle que fait le rayon avec la normale séparant la gaine du cœur.



a. Pour qu'il y ait guidage, il faut que $i_1 > 82°$.
b. Pour qu'il y ait guidage, Il faut que $i_0 < 10,6°$.
c. Le temps de propagation de guidage du rayon lumineux est voisin à 3,33 µs.
d. Le temps de propagation de guidage du rayon lumineux est voisin à 5,03 µs.

V F
a ☐ ☐
b ☐ ☐
c ☐ ☐
d ☐ ☐

Exercice 3

Lentille convergente

Un objet de 1,5 cm de long se trouve à 6,0 cm devant une lentille convergente dont la distance focale est de 4,0 cm.
a. La vergence de cette lentille est égale à 2,5 dioptries.
b. L'image formée est réelle, inversée et agrandie.
c. L'image se forme à 8,3 cm derrière la lentille.
d. La taille de l'image est 0,6 cm.

V F
a ☐ ☐
b ☐ ☐
c ☐ ☐
d ☐ ☐

Exercice 4

Image réelle ou virtuelle ?

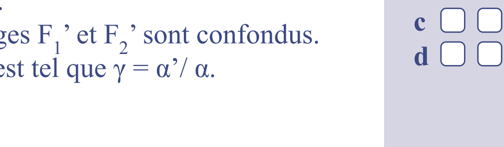
Un objet de 1,5 cm de long se trouve à 6,0 cm devant une lentille convergente dont la distance focale est de 8,0 cm.
a. La vergence de cette lentille est égale à 12,5 dioptries.
b. L'image formée est réelle, inversée et agrandie.
c. L'image se forme à 24 cm derrière la lentille.
d. La taille de l'image est 36 cm.

V F
a ☐ ☐
b ☐ ☐
c ☐ ☐
d ☐ ☐

Exercice 5

La lunette astronomique

a. Une lunette astronomique est constituée de deux lentilles, l'une convergente et l'autre divergente.
b. Une lunette astronomique est constituée de deux lentilles : un objectif de grande focale et d'un oculaire de petite focale.
c. Dans une lunette astronomique les foyers images F_1' et F_2' sont confondus.
d. Le grandissement de la lunette astronomique est tel que $\gamma = \alpha' / \alpha$.



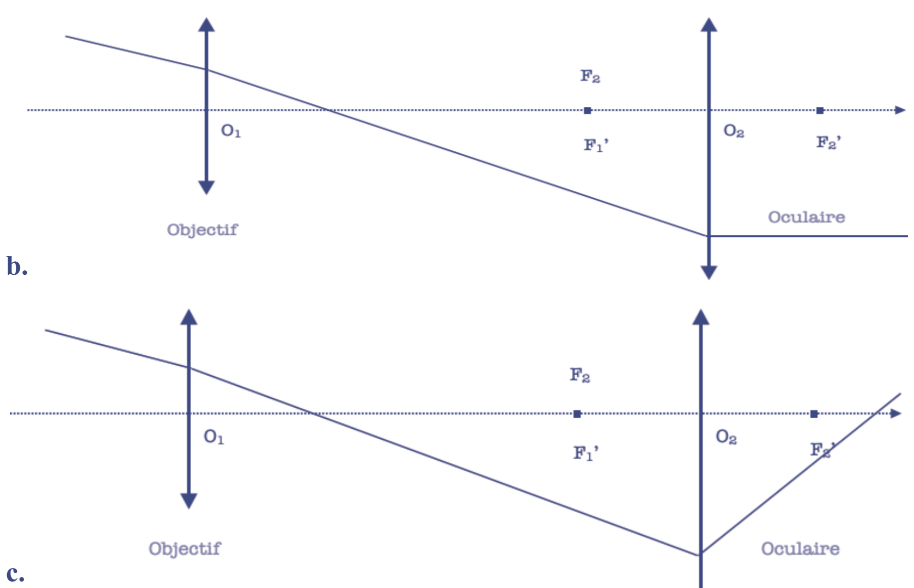
V F
a ☐ ☐
b ☐ ☐
c ☐ ☐
d ☐ ☐

Exercice 6

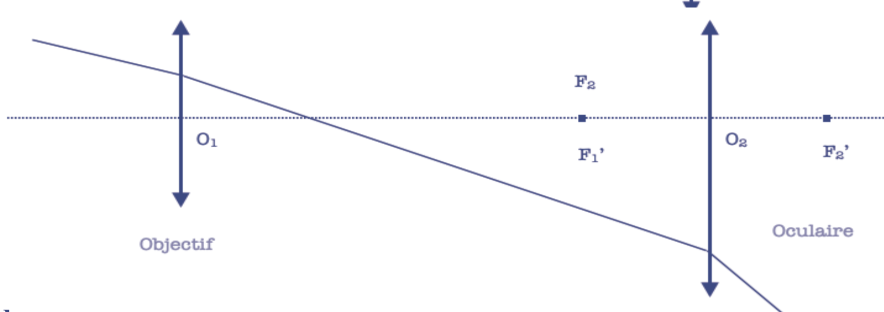
Construction

Le trajet suivi par le rayon incident est :

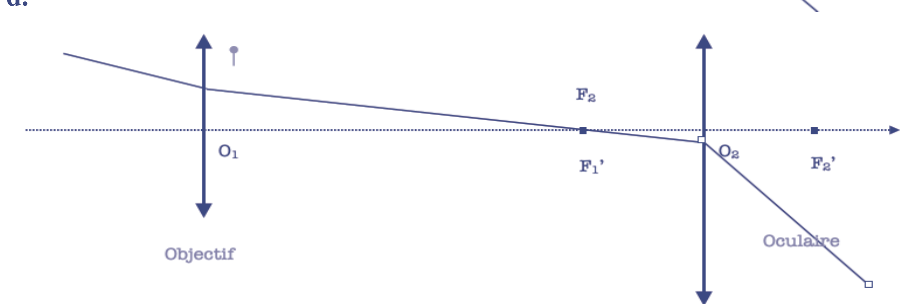
a.



c.



d.



PHYSIQUE

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 7

Jupiter

Un astronome veut observer Jupiter à l'aide d'une lunette astronomique dont l'objectif est de 750 mm de distance focale. L'oculaire a une distance focale de 30 mm. La Distance qui sépare l'observateur de Jupiter est environ égale à 600 millions de km. Son rayon est de 142 000 km.

Données : Distance moyenne Terre – Lune : 360 000 km. Rayon moyen de la Lune : 1 740 km.

a. Le diamètre apparent de Jupiter est environ égal à 1' 40" (1 minute et 40 secondes) d'arc.

b. Le grossissement de cette lunette est égal à 30.

c. Le diamètre apparent de Jupiter dans l'oculaire est égal à 20' (20 minutes) d'arc.

d. À travers l'oculaire, Jupiter apparaît 3 fois plus petit que la Lune vue sans lunette.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

CORRIGÉS

PHYSIQUE

Exercice 1

a. Faux. Cela dépend des indices n_1 et n_2. Si $n_1 > n_2$, le rayon s'éloigne de la normale. En revanche, si $n_1 < n_2$, le rayon se rapproche de la normale.

b. Faux. Lorsque nous sommes dans la situation où $n_1 > n_2$ et où l'angle d'incidence es supérieur à l'angle limite de réfraction ($\arcsin(n_2/n_1)$), alors il y a réflexion totale.

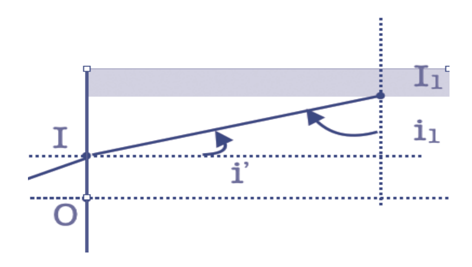
c. Faux. Le rayon incident donne naissance à un rayon réfléchi et un rayon réfracté faisant un angle r = 19,3°. (Loi de Descartes sur la réfraction : $n_1 = 1$; $n_2 = 1{,}51$; i = 30° et donc $r = \arcsin(n_1/n_2) = \arcsin(1/1{,}51)=19{,}3°$)

d. Vrai. b = c/v, donc $v = c/n = 3{,}00.10^8/1{,}51 = 2{,}0.10^8\ m.s^{-1}$.

Exercice 2

a. Vrai. En I_1, la loi de Descartes pour la réfraction, $n_1.\sin i_1 = n_{2.\sin i2}$. Il y a un phénomène de réflexion totale en ce point si $i_2 = 90°$. Ainsi $i_1 > \arcsin(n_2/n_1)$ $= \arcsin(1{,}495/1{,}51) = 81{,}92 = 82°$.

b. Faux.



$i' + i_1 = 90°$, donc $i' = 90 - \arcsin(n_2/n_1)$. Donc $i' < 90 - 82° = 8°$. Et enfin la relation de Descartes en I, $\sin i_0 = n_1.\sin i'$, donc $i_0 < \arcsin(n_1.\sin i') = \text{arc}(1{,}51.\arcsin 8°) = 12°$.

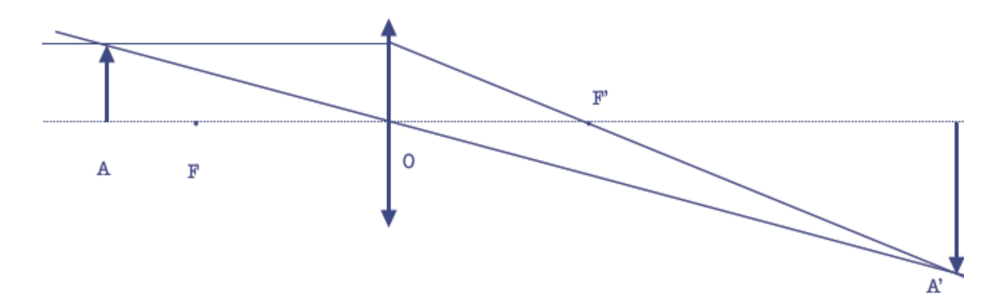
c. Faux. Le temps de propagation de guidage du rayon lumineux est voisin à 5,0 µs. En effet : $t = L/v = L/((c/n_1)) = 1\,000/(3{,}00.10^8/1{,}51) = 5{,}03$ µs.

d. Vrai. Voir réponse précédente.

Exercice 3

a. Faux. La vergence de cette lentille est égale à 25 dioptries. En effet, la vergence $V = 1/f' = 1/0{,}040 = 25\delta$.

b. Vrai. L'image formée est réelle, inversée et agrandie.



c. Faux. L'image se forme à 12 cm derrière la lentille. On utilise la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}} + \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{-6} = \frac{1}{12} \Longrightarrow \overline{OA'} = 12cm$$

d. Faux. La taille de l'image est 3,0 cm. En effet :

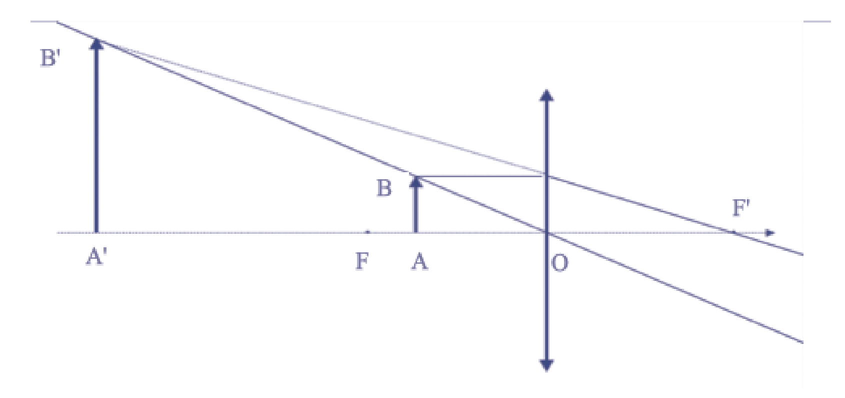
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{12}{-6} = -2 \Longrightarrow donc\ A'B' = 3,0\ cm$$

Exercice 4

a. Vrai. La vergence de cette lentille est égale à 12,5 dioptries.
En effet : V = 1/OF' = 1/0,08 = 12,5 dioptries.

b. Faux. L'image formée est virtuelle, droite et agrandie.

c. Faux. L'image se forme à 24 cm devant la lentille. On utilise comme précédemment la relation de conjugaison.



d. Faux. La taille de l'image est 6,0 cm.

$$\overline{A'B'} = \gamma \times \overline{AB} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \times \overline{AB} = \frac{-24}{-6} \times 1,5 = 6\ cm.$$

Exercice 5

a. Faux. Une lunette astronomique est constituée de deux lentilles, l'une convergente et l'autre convergente aussi.

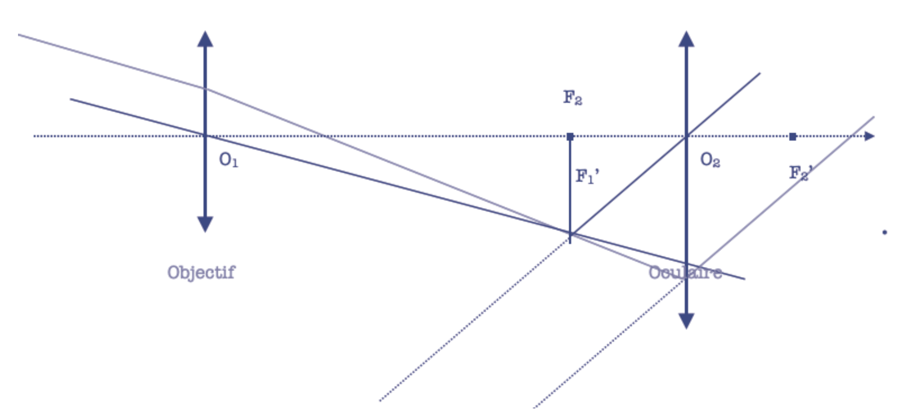
b. Vrai. Voir cours.

c. Faux. Dans une lunette astronomique les foyers images F_1' et F_2 sont confondus.

d. Faux. C'est le grossissement de la lunette astronomique qui est tel que G = α'/α.

Exercice 6

Le trajet suivit par le rayon incident est la réponse b. En effet :



a. Faux.

b. Vrai.

c. Faux.

d. Faux.

Exercice 7

a. Vrai. Le diamètre apparent de Jupiter est environ égal à 50" d'arc. En effet, l'angle α sous lequel est vu Jupiter de la Terre est :

Tan α = 142 000 x 2/600 000 000 = $4{,}73.10^{-4}$, donc a = 0,02712° soit 1 minute 38 secondes d'arc.

b. Faux. Le grossissement de cette lunette est égal à : α'/α = f_1'/f_2' = 750/30 = 250/10 = 25.

c. Faux. Le diamètre apparent de Jupiter dans l'oculaire est égal à : 0,02712° x 25 = 0,678° soit 40 minutes 41 d'arc.

d. Faux. Le diamètre apparent de la Lune est égal à 0,56° soit environ 33' d'arc.

Chapitre 8 L'ÉNERGIE : CONVERSIONS ET TRANSFERTS

Je fais le point sur mes connaissances

- ❖ Savoir comment on passe du niveau microscopique au niveau macroscopique.
- ❖ Savoir qu'un système isolé a une énergie qui demeure constante au cours du temps.
- ❖ Connaître la constante d'Avogadro : $N_A = 6{,}0.10^{23}$ mol^{-1}.
- ❖ Savoir que l'énergie totale d'un système S est la somme de son énergie microscopique et de son énergie macroscopique.
- ❖ Savoir que la totalité de l'énergie microscopique d'un système S est égale à l'énergie interne de ce système S. L'énergie interne est notée U.
- ❖ La variation d'énergie interne ΔU d'un système est égale au travail des forces de pression de l'intérieur du système vers l'extérieur W et l'énergie échangée par transferts thermiques Q.
- ❖ Savoir attribuer un signe à Q et W.
- ❖ Je sais qu'un flux thermique est la quantité d'énergie Q par unité de surface et de temps qui traverse une surface quelconque. Il est noté ϕ. Je sais qu'il se fait de manière irréversible.
- ❖ Je connais les différents modes de transferts thermiques (convection, conduction et rayonnement).

Je sais définir

- ❖ Savoir définir un système S.
- ❖ Savoir définir l'énergie interne U d'un système S.
- ❖ Savoir définir la capacité thermique massique c d'un matériau. Elle est notée c, elle correspond à l'énergie qu'il faut fournir à un 1,0 g de matériau pour élever sa température de 1,0°C.
- ❖ Je sais définir le flux thermique ϕ à travers une paroi.

$$\varphi(W.m^{-2}) = \frac{Q(J)}{\Delta t \times S(m^2)}$$

- ❖ Je sais définir la résistance thermique $R_{thermique}$:

$$R_{thermique}(K.W^{-1}) = \frac{T_2(K) - T_1(K)}{\varphi(W.m^{-2}).S(m^2)}$$

PHYSIQUE

Je sais maîtriser

❖ Je sais utiliser la formule relative aux transferts thermiques :

$$Q(J) = m(kg) \times c(J.K^{-1}.kg^{-1}) \times (T_{final} - T_{initial})(K)$$

avec c : chaleur massique thermique du matériau.

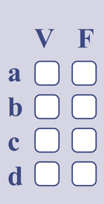
❖ Je sais que $\Delta T = T_{final} - T_{initial}$.

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1

Du macroscopique au microscopique

Pour mesurer une quantité de sucre, nous avons l'habitude de le peser et donc d'**évaluer la masse correspondante m, mais cela ne nous informe qu**'indirectement sur la quantité de matière n de saccharose ($C_{12}H_{22}O_{11}$) contenue dans cet échantillon.



a. Dans une mole il y a $6{,}0.10^{20}$ entités élémentaires.

b. La quantité de saccharose contenue dans 10,0 g est $n = 2{,}92.10^{-2}$ mol.

c. Le nombre de molécules de saccharose contenue dans ces 10,0 g est $N = 1{,}76.10^{21}$.

d. Ces 10,0 g occupent un volume de 6,24 cm^3. Le volume d'une molécule de saccharose est égal à $1{,}05.10^{-23}$ m^3.

Exercice 2

Valeur en eau d'un calorimètre

Dans un calorimètre, on verse 200 ± 0,5 g d'eau à 20°C. Après équilibre, on rajoute 150 ± 0,5 g d'eau à 60°C. On considère que le calorimètre est parfait, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de transfert thermique entre l'intérieur du calorimètre et l'extérieur. On dit alors qu'il est adiabatique.

Données : la capacité thermique de l'eau est $c_{eau} = 4{,}18$ J.g^{-1}.°C^{-1}.

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} \approx \frac{\Delta m_{eau\ froide}}{m_{eau\ froide}} + \frac{\Delta m_{eau\ chaude}}{m_{eau\ chaude}} + \frac{4 \times \Delta\theta}{(\theta_{équilibre} - 20)}$$

V F
a
b
c
d

a. La température atteinte à l'équilibre thermique est $\theta_{équilibre} = 37$°C.

b. En réalité la température d'équilibre est de 35°C. Cela est dû au fait que le calorimètre échange aussi de l'énergie. On appelle valeur en eau μ du calorimètre la masse fictive d'eau qui a la même capacité thermique du calorimètre. La valeur en eau du calorimètre est de 50 g.

c. La précision du thermomètre est estimée à 0,1°C alors que l'incertitude de la valeur en eau est $\Delta\mu = 2$ g. On peut alors considérer que le thermomètre entraîne 2 fois plus d'erreur que le calorimètre.

d. Le constructeur du calorimètre indique une valeur en eau μ comprise entre les valeurs 49 g et 51 g. Le résultat expérimental obtenu est acceptable.

Exercice 3

Fonctionnement d'un moteur

Un moteur est dispositif qui fonctionne en consommant une quantité d'énergie Q_1 mais en restituant un travail mécanique W et une quantité d'énergie Q_2 qui correspond aux pertes du moteur. Le système d'étude est le moteur.

a. $Q_1 > 0$

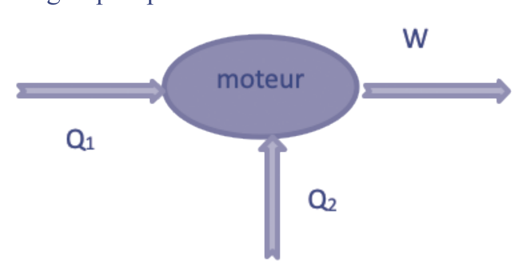
b. $W > 0$

c. $W = Q_2 - Q_1$

d. Les transferts énergétiques peuvent être schématisés de la manière suivante :

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

PHYSIQUE



Exercice 4

Une bouteille thermos

On peut considérer qu'une bouteille thermos se comporte comme un milieu adiabatique (c'est-à-dire n'échangeant pas d'énergie avec le milieu extérieur).

On remplit la thermos (volume = 75 cL) de café sorti juste d'une la cafetière italienne (80°C). On ferme la thermos. On se sert un café 5 min plus tard, et par curiosité, on mesure la température de ce café, elle est alors de 75°C. La thermos est initialement à température ambiante (θ = 20°C).

Données : $c_{café} = 4{,}18\ J.g^{-1}.°C^{-1}$.

a. La quantité de chaleur Q_1 apportée initialement par le café est 15 675 J.

b. Le transfert se fait de la thermos vers le café par convection.

c. La chaleur Q_2 échangée par la thermos est -15 675 J

d. La valeur en eau µ de la thermos est 68 g.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 5

Simple ou double vitrage : partie 1

Dans un appartement équipé de fenêtres « simple vitrage » d'épaisseur e = 6,0 mm, la température θ_1 intérieure est maintenue constante à l'aide d'un chauffage électrique. Cette température est égale à 20°C. En pleine journée en hiver (décembre) et entre 15h00 et 16h00, la température θ_2 extérieure est en moyenne de 5°C. La quantité de chaleur échangée est alors égale à 9,0 $MJ.m^{-2}$.

a. Le flux thermique est dirigé de l'intérieur de vers l'extérieur de l'appartement.

b. Le transfert thermique est un phénomène réversible.

c. Le flux thermique est alors égal à 2 500 $W.m^{-2}$.

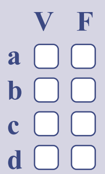
d. La résistance thermique du verre est $6{,}0.10^{-3}\ W.K^{-1}.m^{-2}$.

Exercice 6

Simple ou double vitrage : partie 2

Dans un but d'économiser de l'énergie, le propriétaire de cet appartement décide d'équiper ses fenêtres en « double vitrage ». Un double vitrage est l'assemblage de deux vitres séparées par une couche d'air de 2 mm. La résistance thermique d'une couche d'air de surface 1 m² et d'épaisseur 2 mm l'air est $7{,}6.10^{-2}$ U.S.I. La résistance thermique du verre est égale à $6{,}0.10^{-3}$ U.S.I.

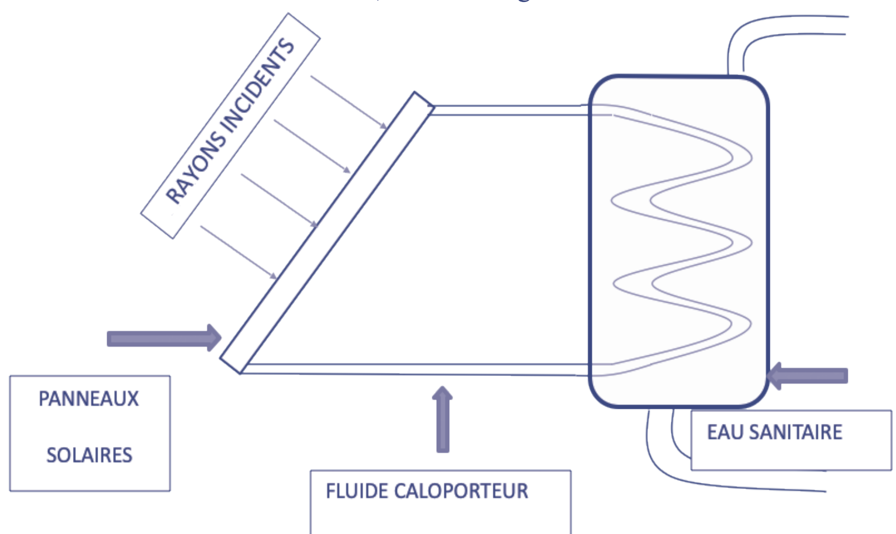
a. La résistance thermique du double vitrage est alors de $3{,}0.10^{-3}$ U.S.I.
b. Le flux thermique est alors de 5 000 $W.m^{-2}$
c. La quantité de chaleur échangée est 18,7 MJ.
d. En remplaçant l'air par une couche d'argon dont la résistance est de $1{,}13.10^{-1}$ U.S.I., la quantité de chaleur échangée est 432 kJ.



Exercice 7

Étude d'un chauffe-eau solaire

Le principe de fonctionnement d'un chauffe-eau solaire est schématisé ci-dessous. Le capteur de rayonnement est constitué d'une boîte fermée par une plaque de verre, sa surface est de 2 m². Placé sur le toit, ce capteur permet de fournir l'eau chaude d'une maison individuelle, dans une région bien ensoleillée.



Données :

Masse volumique de l'eau : $\rho_{eau} = 1\,000$ $kg.m^{-3}$.
Capacité thermique massique de l'eau : $c_{eau} = 4\,180$ $J.kg^{-1}.K^{-1}$.
Le rendement ρ d'un convertisseur d'énergie (ou de puissance) est le rapport de l'énergie utile divisée par l'énergie utilisée.

$$\rho = \frac{\text{énergie utile } (J)}{\text{énergie utilisée } (J)} = \frac{\text{puissance utile } (W)}{\text{puissance utilisée } (W)}$$

Un essai d'utilisation de cet appareil, pendant une période ensoleillée (puissance solaire estimée à 800 $W.m^{-2}$), a donné les résultats suivants :

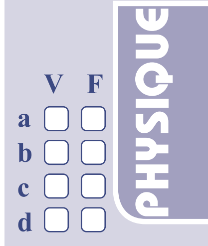
– débit de l'eau circulant dans le capteur : $D = 20\ L.h^{-1}$
– température d'entrée de l'eau : $\theta_1 = 15°C$
– température de sortie de l'eau : $\theta_2 = 40°C$.

a. Les modes de transfert de l'énergie du soleil au panneau solaire se font par convection.

b. La quantité de chaleur absorbée par l'eau circulant dans le capteur pendant une heure est égale à 2 880 kJ.

c. La puissance du chauffe-eau est 581 W.

d. Le rendement de ce chauffe-eau est égal à 72,6 %.



CORRIGÉS

Exercice 1

a. Vrai. Dans une mole, par définition, il y a bien $6{,}0.10^{23}$ entités élémentaires.

b. Vrai, n(C12H22O11) = n/M = 10,0/342 = $2{,}92.10^{-2}$ mol.

c. Faux. Pour calculer le nombre de molécules de saccharose contenues dans ces 10,0 g, on utilise la constante d'Avogadro :

$N(C_{12}H_{22}O_{11}) = n \times N_A = 2{,}92.10^{-2}$ mol x $6{,}02.10^{23} = 1{,}72.10^{22}$ molécules.

d. Faux. V (1 molécule) = $6{,}24/1{,}72.10^{22} = 3{,}63.10^{-22}$ = cm^3 = $3{,}63.10^{-28}$ m^3.

Exercice 2

a. Vrai. Pour calculer la température d'équilibre, il faut tout d'abord envisager les transferts thermiques.

Soit Q_1 le transfert thermique de l'eau chaude vers l'ensemble{eau froide + calorimètre}

$$Q_1 = m_{eau} \times c_{eau} \times (\theta_{équilibre} - 60)$$

Soit Q_2 le transfert thermique de l'ensemble{eau froide + calorimètre} vers l'eau chaude :

$$Q_2 = m_{eau\ froide} \times c_{eau} \times (\theta_{équilibre} - 20)$$

(on ne considère pas encore le calorimètre car il est considéré parfait)

Le calorimètre est adiabatique :

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

On trouve alors la température d'équilibre :

$$m_{eau\ chaude} \times c_{eau} \times (\theta_{équilibre} - 60) + m_{eau\ froide} \times c_{eau} \times (\theta_{équilibre} - 20) = 0$$

$$\theta_{équilibre} = \frac{60 \times m_{eau\ chaude} + 20 \times m_{eau\ froide}}{m_{ec} + m_{ef}} = \frac{60 \times 0,150 + 20 \times 0,200}{0,150 + 0,200} = 37,1C = 37°\text{C}$$

b. Vrai.

Cette fois, il faut considérer le calorimètre :

$$Q_1 = m_{ec} \times c_{eau} \times (\theta_{équilibre} - 60) = 0,150 \times 4180 \times (35 - 60) = -15675\ J$$

$$Q_2 = m_{ef} \times c_{eau} \times (\theta_{équilibre} - 20) + \mu \times c_{eau} \times (\theta_{équilibre} - 20) =$$

$$Q_2 = 0,200 \times 4180 \times (35-20) + \mu \times 4180 \times (35-20) = 12540 + 62700\mu$$

$$Q_1 + Q_2 = -15675 + 12540 + 62700\mu = 0 \Longrightarrow \mu = 0,050 \text{ kg soit } 50 \text{ g.}$$

c. Faux.

L'erreur due au calorimètre est nettement supérieure à celle apportée par la mesure de la température.

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{0,5}{200} + \frac{0,5}{150} + \frac{4 \times 0,1}{(35-20)} = 0,325 \text{ donc } \Delta\mu = 0,325 \times 50 = 1,6 \text{ g}$$

La valeur en eau du calorimètre est comprise entre 48 et 52 g. C'est compatible avec l'indication du constructeur.

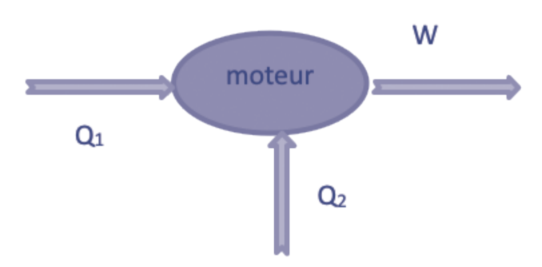
Exercice 3

a. Vrai, tout dépend de la définition du système d'étude. Ici, on considère le moteur. Il consomme une énergie Q_1, cette dernière sera donc considérée positive.

b. Faux. e moteur fournit un travail, il cède donc de l'énergie, donc $W < 0$.

c. Faux. $W = Q_1 - Q_2$

d. Faux.



Exercice 4

a. Faux

La quantité de chaleur Q1 apportée initialement par le café est :

$$Q_1 = m_{cafe} \times c_{cafe} \times \Delta\theta = 750 \times 4,18 \times (75-80) = -15675 \ J$$

En effet, le café cède de l'énergie au système isolé thermiquement {café+thermos}.

b. Faux. Le transfert se fait de la source chaude vers la source froide par conduction.

c. Faux. Le système {thermos + café} est adiabatique, cela signifie que $Q_1 + Q_2 = 0$, donc $Q_2 = 15\,675$ J.

d. Vrai.

Pour calculer la valeur en eau de la thermos, on considère que l'énergie Q2 est apportée pour réchauffer une masse d'eau µ(valeur en eau de la thermos) de la température de 20°C à la température de 75°C.

$$Q_2 = \mu \times c_{eau} \times \Delta\theta \Longrightarrow \mu = \frac{Q_2}{c \times \Delta\theta} = \frac{15675}{4,18 \times (75 - 20)} = 68\ g$$

Exercice 5

a. Vrai. En effet, la chaleur se propage d'une source chaude vers une source froide.

b. Faux. Le transfert thermique se fait de manière irréversible de la source chaude vers la source froide.

c. Vrai En effet :

$$\varphi = \frac{\frac{Q}{S}}{\Delta t} = \frac{9000000}{3600} = 2500 W.m^{-2}$$

Le flux thermique est alors égal à 2 500 W.m^{-2} .

d. Faux. En effet, bien que la valeur de la résistance soit exacte, l'unité est incorrecte. Faisons une analyse dimensionnelle :

$$[R_{th}] = \left[\frac{\theta}{\varphi}\right] = \frac{K}{W.m^{-2}} = K.W^{-1}.m^2$$

Exercice 6

a. Faux. La résistance thermique du double vitrage s'obtient en faisant la somme des résistances thermiques des simples vitrages et de la couche d'air.

$$R_{équivalente} = R_{vitre} + R_{air} + R_{vitre} = 0,006 + 0,076 + 0,006 = 0,088 K.W^{-1}.m^2$$

b. Faux. Le flux thermique est alors :

$$\varphi = \frac{\Delta T}{R_{équivalente}} = \frac{15}{0,088} = 170\ W.m^{-2}$$

c. Faux. La quantité de chaleur échangée est alors :

$$Q = \varphi \times \Delta t = 170 \times 3600 = 6,12.10^5 J.m^{-2}$$

d. Vrai. Dans ce cas la résistance équivalente est :

$$R_{équivalente} = 0,006 + 0,113 + 0,006 = 0,125\ K.W^{-1}.m^2$$

Le flux thermique est alors :

$$\varphi = \frac{\Delta T}{R_{équivalente}} = \frac{15}{0,125} = 120\ W.m^{-2}$$

L'énergie thermique échangée est alors :

$$Q = \varphi \times \Delta t = 120 \times 3600 \; = \; 432.10^3 J.m^{-2} = 432 kJ.m^{-2}$$

Exercice 7

a. Faux. Les modes de transfert de l'énergie du soleil au panneau solaire se font par rayonnement électromagnétique.

b. Faux. Pour calculer la quantité de chaleur absorbée par l'eau circulant dans le capteur pendant une heure, on doit tout d'abord calculer la masse d'eau ayant circulé dans le circuit, pour cela, on utilise le débit :

$$m = \rho \times D = 1,0 \times 20 = 20\ kg$$

$$Q(J) \; = \; m_{eau} \times c_{eau} \times (\theta_{sortie} - \theta_{entrée}) \; = 20 \; \times \; 4180 \; \times \; (40 - 15) \; = 2,090.10^5 J \; = 2090\ kJ$$

c. Vrai. La puissance du chauffe-eau est 581 W. P = Q/Δt = 2 090.10^3/3 600 = 581 W.

d. Vrai. Le rendement de ce chauffe-eau est r = 581/800 = 0,726 soit 72,6 %.

PHYSIQUE

Chapitre 9 CARACTÉRISATION DES PHÉNOMÈNES ONDULATOIRES

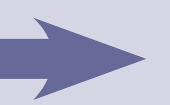
Je fais le point sur mes connaissances

- ❖ Je sais ce qu'une perturbation est une modification des propriétés de l'espace.
- ❖ Je sais qu'une onde mécanique est le phénomène de propagation d'une perturbation dans un milieu sans transport de matière mais avec transport d'énergie.
- ❖ Je sais qu'une onde mécanique progressive est une onde qui se propage dans toutes les directions de l'espace. Une onde mécanique progressive unidimensionnelle se propage dans une direction de l'espace.
- ❖ Je sais qu'une onde progressive transversale est telle que la perturbation se propage perpendiculairement au déplacement de l'onde.
- ❖ Je sais qu'une onde progressive longitudinale est telle que la perturbation se propage dans la même direction que l'onde.
- ❖ Je sais qu'une onde sonore est le déplacement de zones de compression et de dépression de l'air.
- ❖ Je sais que la célérité de l'onde mécanique dépend du milieu. Pour les ondes sonores, la célérité de l'onde est plus élevée dans les solides que dans les liquides et elle est plus élevée dans les liquides que dans les gaz.
- ❖ Je sais que lorsque la source est une perturbation périodique sinusoïdale, alors l'onde l'est aussi.
- ❖ Je sais ce qu'une onde sonore, ultrasonore ou infrasonore est une onde mécanique. Elle a besoin d'un support matériel pour se propager.
- ❖ Je sais qu'une onde sonore (ultrasonore, infrasonore) est une onde longitudinale.
- ❖ Je sais que la fréquence d'un son pur est sa hauteur. Plus la fréquence est élevée, plus le son est aigu.
- ❖ La bande passante de l'oreille humaine est comprise entre 20 Hz et 20 000 Hz.
- ❖ Au-dessous de 20 Hz, nous avons les infrasons, au contraire, au-dessus de 20 000 Hz, nous avons les ultrasons.
- ❖ Je sais qu'un son complexe périodique peut-être décomposé en une somme de sons purs. **La décomposition spectrale** du son composé me permet de déterminer le **fondamental** de ce son et les différents **harmoniques** qui le composent.
- ❖ Ce son complexe de fréquence f_1 est tel que :
  - – f_1 est le fondamental de ce son ;
  - – $f_n = n.f_1$ (n : entier non nul et supérieur à 1) sont appelés les harmoniques de ce son.
- ❖ Je sais que plus le nombre d'harmoniques est important, plus le son est riche. Ce sont les harmoniques qui font le timbre d'un son.
- ❖ Je sais que la lumière peut s'interpréter par deux théories, c'est la dualité onde-corpuscule.

– La théorie ondulatoire rendue nécessaire par les phénomènes de diffraction et d'interférences de la lumière.
– La théorie corpusculaire rendue nécessaire pour expliquer l'interaction lumière-matière.

❖ Je sais comment se traduit l'effet Doppler pour une source sonore en mouvement par rapport à un récepteur sonore.

Je sais définir



❖ Je sais définir la vitesse de propagation d'une onde que l'on nomme célérité de l'onde.

❖ Je sais définir la période T(s) d'un phénomène périodique.

❖ Je sais définir la fréquence f(Hz) d'un phénomène périodique.

❖ Je connais la relation entre la fréquence f(Hz) et la période T(s).

$$f(Hz) = 1/T(s)$$

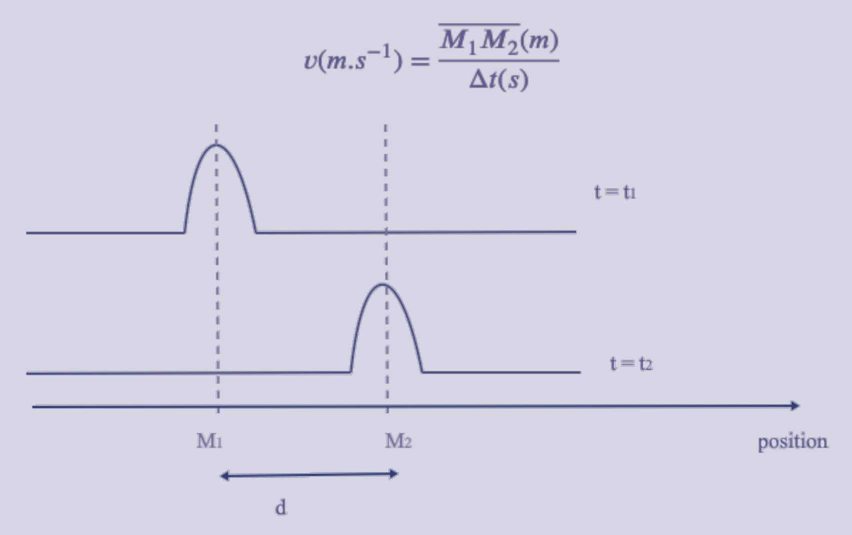
❖ Je sais définir la longueur d'onde λ (m) d'une onde mécanique.

$$\lambda(m) = c(m.s^{-1})/f(Hz) = c(m.s^{-1}) \times T(s)$$

❖ Je sais définir le retard Δt de l'onde.

❖ Je sais définir la vitesse de propagation de l'onde (ou célérité) :

$$v(m.s^{-1}) = \frac{\overline{M_1M_2}(m)}{\Delta t(s)}$$



❖ Je sais que le niveau sonore I est défini comme le rapport de la puissance $P_{reçue}$ (W) reçue en un point de l'espace par l'onde sonore divisée par la surface S(m²) du récepteur :

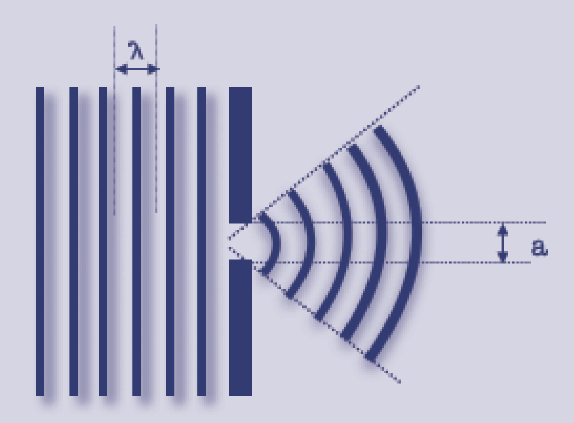
$$I(W.m^{-2}) = P(W)/S(m^2)$$

❖ Je sais que pour définir l'intensité sonore (en décibel), j'utilise une échelle logarithmique :

$$I_{dB} = 10.\log(I(W.m^{-2})/I_0(W.m^{-2})$$

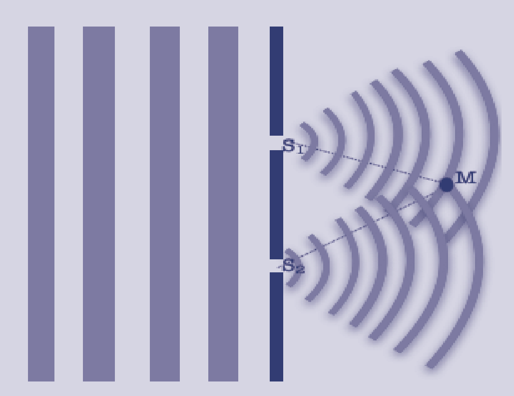
Avec I_0 : intensité sonore de référence : $I_0 = 10^{-12}$ W.m^{-2}.

❖ Je sais définir l'angle caractéristique de diffraction α : $\alpha = \lambda/a$



– avec a = largeur de l'ouverture (m)
– avec λ = longueur d'onde (m)

❖ Je sais définir la différence de marche dans le cas d'interférences δ :
$\delta = S_2M - S_1M$.



❖ Je sais définir l'effet Doppler.

Je sais maîtriser

❖ Je maîtrise les conversions d'unités.
❖ Je sais apprécier la valeur d'un résultat expérimental par rapport au résultat théorique, en calculant l'erreur relative.
❖ Je sais reconnaître un son simple et un son complexe.
❖ Je sais retrouver le fondamental et les harmoniques dans une décomposition spectrale.

PHYSIQUE

❖ Je sais exploiter la relation $\theta = \lambda/a$ dans le cas de la diffraction.

❖ Je sais exploiter la différence de marche dans le cas d'interférences constructives et destructives.

Interférences constructives	Interférences destructives
$\delta = k.\lambda$ k appartenant à Z.	$\delta = (2k+1)/2.\lambda$ k appartenant à Z.
Les amplitudes s'ajoutent.	Les amplitudes s'annulent.

❖ Je sais effectuer utiliser une relation mathématique illustrant l'effet Doppler.

❖ Je sais calculer la fréquence reçue par un récepteur lors du mouvement d'une source sonore (f_r) lorsqu'elle se déplace avec une vitesse constante v.

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1

Généralités

En se propageant, une onde mécanique :

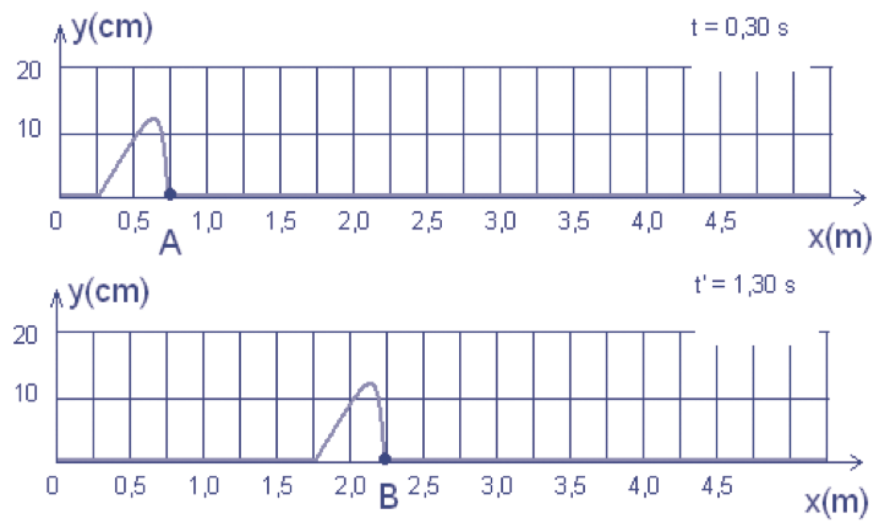
a. transporte de la matière.
b. transporte de l'énergie.
c. transporte de l'énergie et de la matière.
d. ne transporte ni matière, ni énergie.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 2

Onde mécanique

On visualise la propagation d'une perturbation le long d'une corde. Le début de la perturbation est en un point A à l'instant t. Il arrive en un point B à la date t'.



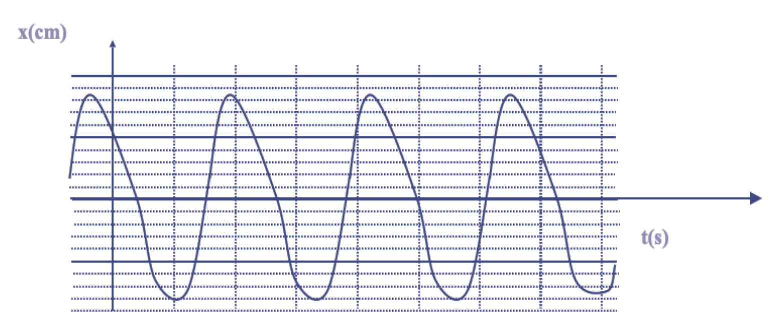
a. La célérité de l'onde est 1,0 m.s^{-1}.
b. Elle arrivera au point M d'abscisse x_M = 4,0 m à la date t = 3,00 s.
c. Lors du déplacement de la perturbation, il y a transport de matière.
d. Le retard de l'onde en B par rapport à A est Δt = 2,25 s.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 3

Onde progressive ou pas

Sur le schéma ci-après, on peut visualiser le mouvement d'une corde lorsqu'elle est attachée à un vibreur. Sur l'horizontale 1div = 0,10 s. Sur la verticale 1div = 1,0 cm.

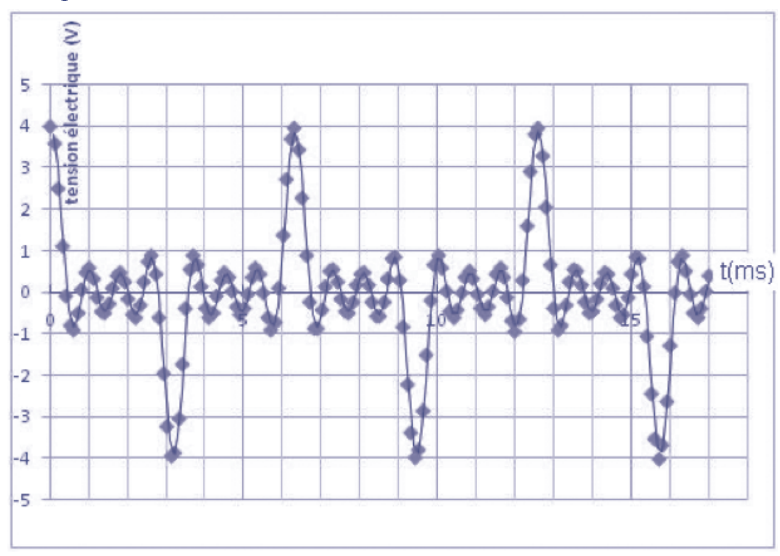


a. Il s'agit d'une onde mécanique progressive périodique.
b. Il s'agit d'une mécanique progressive périodique sinusoïdale.
c. L'amplitude de cette onde à la date t = 0 est x = 1,0 cm.
d. La période de cette onde est T = 0,228 s ± 0,008 s.

Exercice 4

Guitare

On mesure la tension électrique aux bornes d'un haut microphone enregistrant un joueur de guitare lorsqu'il joue une note de musique. Ce microphone est relié à un ordinateur par le biais d'une interface.



Enregistrement d'une note de musique.

a. La période de ce signal périodique est de 3,2 ±0,1 ms.
b. Le signal est périodique sinusoïdal.
c. Le fondamental de ce son est le la$_3$. La fréquence du la$_3$ est égale à 440 Hz.
d. La formule permettant de calculer l'incertitude sur la fréquence est la suivante :

$$\Delta f = f \times \frac{\Delta T}{T}$$

L'intervalle de confiance de la fréquence est donc [147 Hz ; 173 Hz].

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

PHYSIQUE

Exercice 5

Les dauphins

Les dauphins émettent des ultrasons de fréquences comprises entre $1,6.10^4$ Hz et 10.10^4 Hz.

a. Le domaine des ultrasons se situe au-dessus de 30 000 Hz.

b. La période des ultrasons émis par les dauphins est comprise entre $1,0.10^{-5}$ s et $6,25.10^{-5}$ s.

c. La longueur d'onde dans l'eau de mer ($c = 1\ 500\ m.s^{-1}$) de ces ultrasons est comprise en 15 mm et 94 mm.

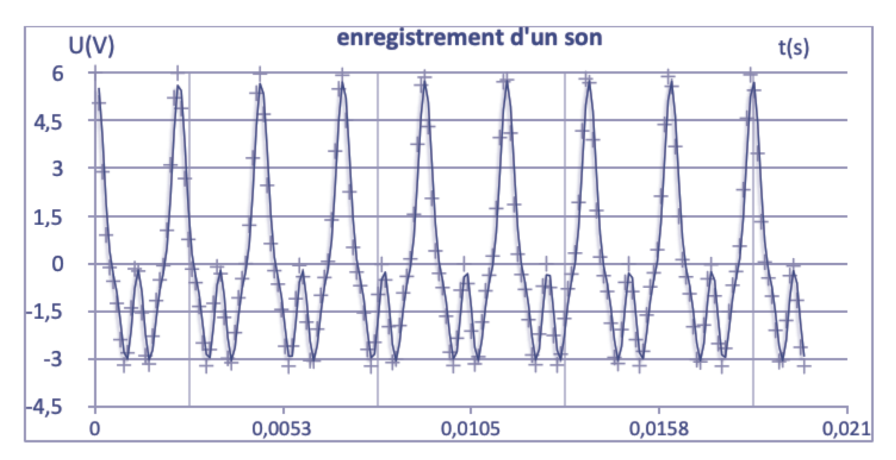
d. Un dauphin envoie une salve d'ultrasons. Il reçoit l'écho 15 ms plus tard. Le banc de sardines se trouve à 22,5 m.

	V	F
a	▢	▢
b	▢	▢
c	▢	▢
d	▢	▢

Exercice 6

Analyse spectrale

À l'aide d'un microphone relié à un ordinateur, nous avons réalisé l'enregistrement d'un son. Puis nous en avons fait son analyse spectrale.

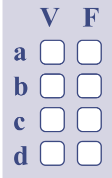


a. La hauteur de ce son est 490 Hz.

b. Il s'agit d'un son pur.

c. La fréquence du fondamental est 490 Hz.

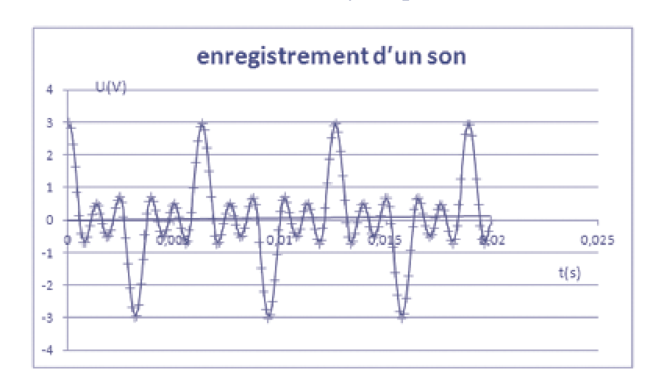
d. La fréquence du deuxième harmonique est 980 Hz.

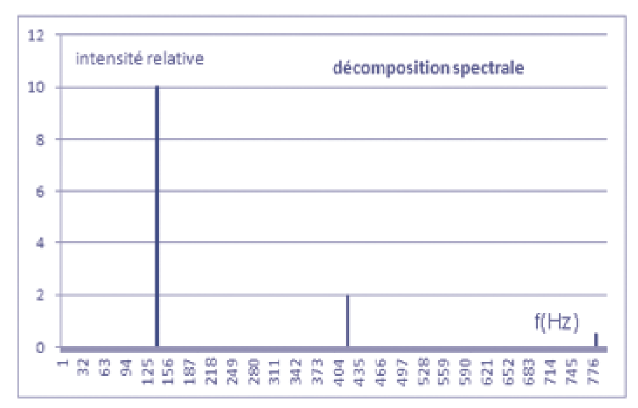


Exercice 7

Analyse spectrale

À l'aide d'un microphone relié à un ordinateur, nous avons réalisé l'enregistrement d'un son. Puis nous en avons fait son analyse spectrale.





a. Il s'agit d'un son complexe.
b. Il est constitué d'un fondamental et de deux harmoniques.
c. Le premier harmonique a une fréquence de 780 Hz.
d. Le fondamental a une fréquence de 139 Hz.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 8

Intensité sonore 1

L'intensité sonore I est la puissance sonore reçue par un récepteur par m^2.
a. Elle s'exprime en dB.
b. L'intensité sonore de référence est notée I_0. Elle est égale à $1{,}0.10^{-12}$ U.S.I.
c. Le niveau sonore L s'exprime en décibel (dB).
d. Pour une intensité sonore $I = 1{,}0.10^{-10}$ U.S.I., le niveau sonore est $I_{dB} = 100$ dB.

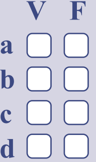
	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 9

Intensité sonore 2

Une source sonore émet un son avec une puissance de 100 W.

a. L'intensité sonore perçue à 1 m de la source est 7,96 U.S.I. et son niveau sonore est de 129 dB.
b. L'intensité sonore à 10 m est 0,796 U.S.I.
c. Le niveau sonore perçu à 10 m est de 119 dB.
d. L'intensité sonore a diminué de 10 dB.



Exercice 10

Effet Doppler 1

L'effet Doppler est la variation de fréquence d'une onde (célérité c) mesurée lors du déplacement d'une source sonore de fréquence f_e avec une vitesse constante v. La distance entre la source émettrice et le récepteur varie au cours du temps. La fréquence reçue par le récepteur est f_r. Lorsque l'émetteur se déplace par rapport au récepteur, la fréquence du récepteur est égale à :

$$f_r = f_e \times \frac{c}{c \mp v}$$

selon que la source s'éloigne ou se rapproche.

a. Lorsque la source sonore se rapproche, le son est plus grave.
b. Si l'émetteur s'approche du récepteur, alors $f_r > f_e$.
c. Si l'émetteur s'éloigne du récepteur la fréquence du récepteur est égale à :

$$f_r = f_e \times \frac{c}{c - v}$$

d. C'est l'effet Doppler qui est utilisé par un radar sur les routes de France.

V F
a
b
c
d

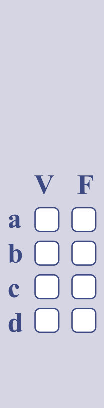
Exercice 11

Effet Doppler 2

Un camion de pompier, sirène en marche, se déplace à vitesse constante $v = 49$ km.h^{-1}. Il déclenche son alarme à la date t_1 . À cette date, un piéton est situé à 300 m du camion. Il entend cette sirène à un instant t_2.

Données : vitesse du son dans l'air : 340 m.s^{-1}.

a. La durée du parcours de l'onde sonore entre la date t_1 et la date t_2 est 30 ms.
b. À l'instant $t_3 > t_2$, le piéton entend la sirène mais avec une fréquence plus petite qu'à la date t_2. La voiture continue de se rapprocher du piéton.
c. L'ambulance passe devant le piéton à la date $t_4 = t_1 + 22$ s
d. À la date $t_5 > t_4$, le piéton entend la sirène avec une fréquence plus petite.



Exercice 12

Les étoiles

La première raie de l'atome de sodium Na mesurée sur un astre (observateur et sodium immobiles sur l'astre) a pour longueur d'onde : λ_0(Na) = 588,9950 nm. Cette même raie observée par l'observateur immobile sur Terre mais émise par une source (étoile) qui est en mouvement par rapport à notre planète avec une vitesse radiale $V_{\text{Étoile}}$ a une longueur d'onde λ_1(Na) = 589,0496 nm.

a. L'étoile s'éloigne de la Terre.

b. Le spectre observé par un Terrien est un spectre d'absorption.

c. Le décalage relatif de longueurs d'onde est :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{V_E}{c}$$

d. La vitesse V de déplacement de l'étoile est V = 26,81 km.s^{-1}.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 13

Interférences

On réalise l'expérience des fentes d'YOUNG. Les fentes sont éclairées par une source, qui émet des photons un par un au cours du temps. On mesure l'interfrange i = 100 µm.

Données :

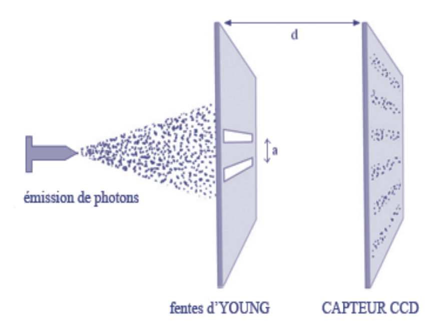


Figure 1 : dispositif d'interférence d'YOUNG

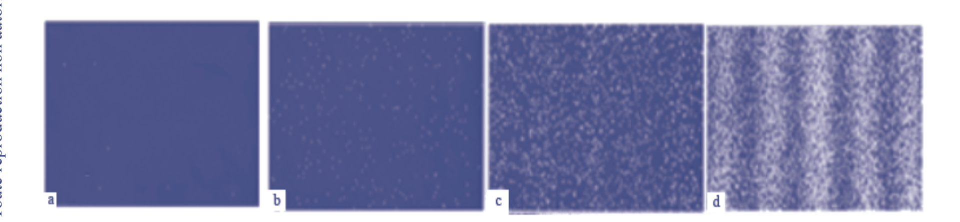


Figure 2: figures d'interférence en fonction du temps de pose (a : temps de pose court ; d : temps de pose très long)

Longueur d'onde des photons émis : $\lambda = 600$ nm ; d = 1,00 m

a. Cette expérience on montre le caractère corpusculaire de la lumière.
b. Cette expérience on montre le caractère ondulatoire de la lumière.
c. La répartition des photons sur la plaque est équiprobable.
d. La distance entre les deux fentes est a = 0,60 mm.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 14

Diffraction

L'expérience « laser-lune » de l'Observatoire de La Côte d'Azur (OCA) a pour but la détermination précise de la distance terre-lune et de ses variations. Elle est située près de Grasse. Un LASER émet une impulsion au foyer *F* d'un télescope placé à la surface de la Terre. Ce télescope est pointé en direction d'un réflecteur placé sur la Lune, qui renvoie vers la Terre une partie de la lumière qu'il reçoit. L'énergie lumineuse transportée à chaque impulsion est 0,30 J sur une durée de 0,3 µs. Le principe est la mesure de la durée Δt d'aller-retour d'une impulsion laser émise du sol terrestre vers un réflecteur lunaire. Le diamètre du faisceau à la sortie du laser est de d = 1,2 cm. On mesure un intervalle $\Delta t \approx 2,56$ s entre l'émission d'une impulsion et la réception du signal de retour correspondant. Actuellement, la distance D est déterminée au centimètre près. La longueur d'onde du LASER utilisé est de $\lambda = 532$ nm. Les mesures montrent qu'on ne détecte en moyenne qu'un seul photon de retour pour une centaine d'impulsions du laser émises en 10 s.
Donnée : la divergence d'un tel laser est donnée par la relation :

$$\theta = 1,22 \times \frac{\lambda}{d}$$

a. La distance Terre – Lune est de 384 000 km
b. La précision que l'on doit avoir sur la mesure du temps pour connaître la distance Terre – Lune au centimètre près doit être inférieure à $1,0.10^{-10}$ s.
c. La puissance de ce laser lorsqu'il émet est 10^3 W.
d. Le nombre de photons émis par impulsion est $8,04.10^{17}$ photons.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

CORRIGÉS

Exercice 1

a. Faux.

b. Vrai.

c. Faux.

d. Faux.

Exercice 2

a. Faux. la célérité de l'onde est de 1,5 m.s.

b. Faux. Pour arriver en M, l'onde doit parcourir 1,75 m de plus. La durée nécessaire pour parcourir cette distance est 1,17 s. Elle arrivera en M à la date 2,47 s.

c. Faux. Il n'y a pas de transport de matière lorsque l'onde se déplace.

d. Faux. Le retard est de 1,0 s.

Exercice 3

a. Vrai. Elle est progressive car elle se propage. Elle est périodique car elle se reproduit toujours identique à elle-même.

b. Faux. Elle n'est pas sinusoïdale.

c. Faux. L'amplitude de cette onde à la date t = 0 est x = 0,04 m.

d. Faux. La période de cette onde est T = 0,21 s ± 0,01 s. On détermine graphiquement la période sur trois motifs, et l'on fait une moyenne. Pour l'incertitude : on peut apporter une précision de l'ordre de 1/5 de division, soit 0,02 s. On faisant une moyenne sur trois motifs, la précision devient égale à 0,02/3 = 0,007 s. (on arrondit à 0,01 s).

Exercice 4

a. Faux. La période de ce signal périodique est de 6,30 ±0,25 ms. L'erreur commise est Δt = 0,25 ms.

b. Faux. Le signal est périodique, mais il n'est pas sinusoïdal.

c. Faux. La période du fondamental est de 6,30 ms, sa fréquence est donc 1/0,0063 = 159 Hz. Or la note de musique la_3 a une fréquence de 440 Hz.

d. Faux. $f \times \frac{\Delta T}{T} = 238 \times \frac{0,17}{4,2} = 10\ Hz$, donc l'intervalle de confiance de la fréquence est donc [152 Hz ; 166 Hz].

Exercice 5

a. Faux. Il se situe au-dessus de 20 000 Hz.

b. Faux. On utilise la formule T(s) = 1/f(Hz).

c. Vrai. $\lambda = c(m.s^{-1})xT(s) = c(m.s^{-1})/f(Hz)$, donc $\lambda_1 = 0{,}15$ m et $\lambda_2 = 0{,}094$ m

d. Faux. Il faut considérer l'aller-retour, donc le banc de poissons se trouve à 11,3 m.

Exercice 6

a. Faux : Sur 8 périodes, la durée est de 18,2 ± 0,2 ms. Soit une fréquence f = 440 ± 20 Hz. En effet :

$$\Delta f = f \times \frac{\Delta T}{8T} = 440 \times \frac{0,5ms}{18,2ms} = 12\ Hz \approx 20\ Hz\ en\ majorant\ l'erreur.$$

La hauteur de ce son est la fréquence du fondamental est comprise entre [420 ; 460] Hz.

b. Faux. Il s'agit d'un son complexe.

c. Faux. La fréquence du fondamental est comprise entre 420 Hz et 460 Hz.

d. Faux. La fréquence du deuxième harmonique est 440 x 3 = 1 320 Hz.

Exercice 7

a. Vrai. Il s'agit bien d'un son complexe. En effet, le son est composé d'un fondamental (f = 139 Hz) et de deux harmoniques (f_2 = 420 Hz, f_3 = 780 Hz)

b. Faux. Voir réponse précédente.

c. Faux. Le premier harmonique a une fréquence environ égale à 400 Hz.

d. Vrai. Le fondamental a une fréquence environ égale à 140 Hz.

Exercice 8

a. Faux. Elle s'exprime en $W.m^{-2}$.

b. Vrai. L'intensité sonore de référence est notée I_0. Elle est égale à $1{,}0.10^{-12}$ $W.m^{-2}$.

c. Vrai. Le niveau sonore est défini de la manière suivante :

$$I_{dB} = 10.log\left(\frac{I(W.m^2)}{I_0(1,0.10^{-12}W.m^2}\right)$$

Le niveau sonore s'exprime en décibel (dB).

d. Faux. Pour une intensité sonore $I = 1{,}0.10^{-10}$ U.S.I., le niveau sonore est

$$I_{dB} = 10.log\left(\frac{1,0.10^{-10}}{I_0(1,0.10^{-12}}\right) = 10.log\left(10^2\right) = 20.log10 = 20dB$$

Exercice 9

a. Vrai. La source émet dans toutes les directions. On cherche alors la surface S d'une sphère de rayon 1,0 m. L'intensité sonore perçue à 1 m de la source est donc donnée par la relation :

$$I(W.m^{-2}) = \frac{P(W)}{S(m^2)} = \frac{100}{4.\pi.R^2} = \frac{100}{4.\pi.1^2} = 7,96\ W.m^{-2}$$

b. Faux. L'intensité sonore à 10 m est $7{,}96.10^{-2}$ $W.m^{-2}$.

c. Faux. Le niveau sonore perçu à 10 m est de 218 dB.

$$I_{dB} = 10.log\left(\frac{7,96.10^{-2}}{I_0(1,0.10^{-12}}\right) = 109\ dB$$

d. Faux. A 1,0 m, le niveau sonore est :

$$I_{dB} = 10.log\left(\frac{7,96}{I_0(1,0.10^{-12}}\right) = 129\ dB$$

Donc le sonore a diminué de 20 dB.

Exercice 10

a. Faux. Lorsque la source se rapproche, la fréquence augmente et le son est plus aigu.

b. Vrai. Voir réponse précédente.

c. Faux. Si l'émetteur s'éloigne du récepteur la fréquence du récepteur est égale à :

$$f_r = f_e \times \frac{c}{c+v}$$

En effet, la fréquence diminue.

d. Vrai. Il est utilisé par certains radars.

Exercice 11

a. Faux. La durée du parcours de l'onde sonore entre la date t1 et la date t_2 est :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{d}{c+v} = \frac{300}{340 + \frac{49}{3,6}} = 848\ ms$$

soit 0,85 s.

b. Faux. La voiture se rapproche encore du piéton tout en étant plus proche de lui, donc la fréquence augmente. Le son devient plus aigu.

c. Vrai. La durée de parcours de la voiture est :

$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{300}{\frac{40}{3,6}} = 22,0\ s$$

d. Vrai. La voiture s'éloigne du piéton, la fréquence diminue et le son devient plus grave.

Exercice 12

a. Vrai. Le décalage des raies d'absorption d'un élément chimique sur le spectre d'une étoile permet de savoir si l'étoile s'éloigne ou se rapproche du lieu d'observation. La longueur d'onde de la raie jaune du sodium $\lambda_1 > \lambda_0$ donc l'étoile s'éloigne de la Terre.

b. Vrai. Il s'agit bien d'un spectre d'absorption (spectre de la lumière blanche dans lequel on retrouve des bandes noires d'absorption).

c. Faux. Le décalage de longueurs d'onde est :

$$\left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right| = \left|\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0}\right| = \left|\frac{\frac{c}{f_1} - \frac{c}{f_0}}{\frac{c}{f_0}}\right| = \left|\frac{f_0 - f_1}{f_1}\right| = \left|\frac{f_0 - f_0\frac{c}{c+v}}{f_0\frac{c}{c+v}}\right| = \frac{c}{c+v}$$

Conclusion :

$$\left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right| = \frac{v}{c}$$

d. Pour cela, j'utilise la formule relative à l'effet Doppler pour une source lumineuse en déplacement par rapport à un observateur démontré dans la question précédente :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{589,9950 - 589,0496}{589,9950} = 1,608488.10^{-3} = \frac{V_E}{c}$$

Donc :

$$V_E = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\times c = 1,608488.10^{-3} \times 3,00.10^{8} = 482546\ m.s^{-1} \approx 483\ km.s^{-1}$$

Exercice 13

a. Faux. Cette expérience a permis de confirmer le comportement ondulatoire de l'électron.

b. Vrai. En mécanique newtonienne (donc non relativiste), l'électron a une énergie cinétique

c. Faux. Les électrons sont localisés.

d. Faux. La distance entre les fentes est :

$$i = \frac{\lambda \times d}{a} \; donc \; a = \frac{\lambda \times d}{i} = \frac{600.10^{-9} \times 1,00}{100.10^{-6}} = 6,00.10^{-3} m = 6,00\ mm$$

Exercice 14

a. **Vrai.** Pour déterminer la distance Terre-Lune, il faut considérer l'aller-retour. La lumière se propage dans le vide ou dans l'air à la célérité c = $3{,}00.10^8$ m.s^{-1}.

$$d = \frac{c \times \Delta t}{2} = \frac{3,00.10^8 \times 2,56}{2} = 3,84.10^8 m \;=\; 384\,000\ km$$

b. Vrai. La précision que l'on doit avoir sur la mesure du temps pour connaître la distance Terre–Lune au centimètre près doit être inférieure à $1{,}0.10^{-10}$ s.

$$\Delta t = \frac{2d}{c} = \frac{0,01 \times 2}{3,00.10^8} = 6,67.10^{-11} s$$

c. Faux. La puissance de ce laser lorsqu'il émet est $1{,}00.10^6$ W = 1,00 MW

$$P(W) = \frac{E(J)}{\Delta t(s)} = \frac{0,30 J}{0,3.10^{-6} s} = 1,0.10^6 W = 1,0 MW$$

d. Faux. L'énergie d'un photon est :

$$E(J) \;=\; h \times \upsilon = \frac{h \times c}{\lambda} = \frac{6,62.10^{-31} \times 3,00.10^8}{532.10^{-9}} = 3,73.10^{-19} J$$

Le nombre de photons pendant 1 impulsion est :

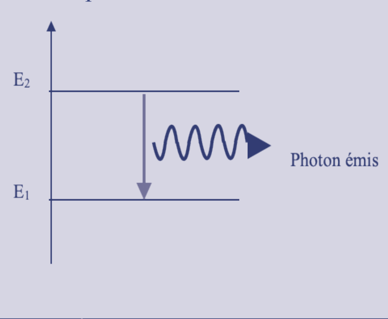
$$N = \frac{0,3}{3,73.10^{-19}} = 2,09.10^{19}$$

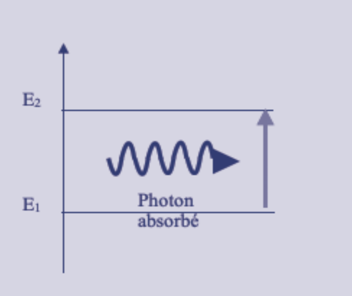
PHYSIQUE

Chapitre 10 INTERACTION LUMIÈRE MATIÈRE : EFFET PHOTOÉLECTRIQUE

Je fais le point sur mes connaissances

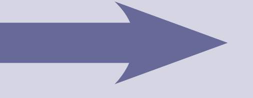
- Savoir que les ondes électromagnétiques se propagent à la vitesse de la lumière dans le vide c = 3,00.108 m.s-1.
- Savoir qu'une onde est caractérisée par sa fréquence ν.
- Je connais la relation liant la fréquence et la longueur d'onde :
- $\lambda(m) = c(m.s^{-1}) / \nu(Hz) = c(m.s^{-1})\ xT(s)$.
- Je sais que dans la théorie corpusculaire, la lumière est constituée de photons (grains de lumière) dont l'énergie est Ephoton(J) = h. ν(Hz) = h.c/λ(m).
- h = constante de Planck = 6,63.10-34 J.s-1.
- Je sais que les niveaux d'énergie d'un atome sont quantifiés. Ils ne peuvent prendre que des valeurs précises et caractéristiques.
- La transition d'un niveau d'énergie vers un autre provoque soit l'absorption d'un photon, soit l'émission d'un photon.





- ❖ Je sais que l'effet photoélectrique a été observé par Heinrich Herz en 1887 et expliqué par Albert Einstein. Cela lui a valu le prix Nobel en 1905.
- ❖ Je sais que l'effet photoélectrique consiste en l'émission d'électrons par un métal sous à l'effet un rayonnement électromagnétique suffisamment énergétique.
- ❖ Je sais que l'effet photoélectrique ne peut s'expliquer que par la théorie corpusculaire de la lumière.
- ❖ Je sais que l'effet photoélectrique est à l'origine de la cellule photovoltaïque.

Je sais définir



- ❖ Je sais que l'énergie nécessaire à l'extraction d'un électron d'un métal s'appelle l'énergie d'extraction. Elle est notée W_e.
- ❖ Je sais que l'énergie d'un photon est égale au produit de la fréquence de ce photon par la constante de Planck. $E_{photon}(J) = h.\ \nu(Hz)$.
- ❖ Je sais que l'énergie d'un photon est inversement proportionnelle à la longueur d'onde de ce dernier. $E_{photon}(J) = h.c(m.s^{-1}) / \lambda(m)$, avec $c = 3{,}00.10^{8}\ m.s^{-1}$.
- ❖ Je sais définir le rendement d'une cellule photovoltaïque :

$$rendement = \eta = \frac{P_{maximale\ délivrée\ par\ la\ cellule\ (W)}}{P_{lumineuse\ reçue\ par\ la\ cellule\ (W)}}$$

- ❖ Je sais ce qu'est un semi-conducteur.

  Un **semi-conducteur** est un matériau qui possède les caractéristiques électriques d'un isolant, mais pour lequel il est possible qu'un électron contribue à l'établissement d'un courant électrique.
- ❖ Je sais que la conductivité électrique d'un semi-conducteur peut être contrôlée par dopage de ce dernier.
- ❖ Je sais ce qu'est le dopage d'un matériau semi-conducteur [ajout d'électron (charge -) ou de trou (charge +)].
- ❖ Je sais définir la fréquence et la longueur d'onde de seuil d'un métal.

Je sais maîtriser



- ❖ Je sais faire le bilan énergétique de l'effet photoélectrique.

  $E_{incidente\ (photon)}\ (J) = W_e(J) + E_c(J)$ (électron extrait).

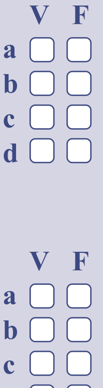
  Avec W_e : travail d'extraction ; $E_{incidente\ (photon)}\ (J) = h.\ \nu(Hz)$ et Ec(J) : énergie cinétique de l'électron extrait.
- ❖ Je sais maîtriser la formule du rendement d'une cellule photoélectrique.
- ❖ Je sais calculer la fréquence de seuil f_{seuil} d'un métal.
- ❖ Je sais calculer la longueur d'onde de seuil λ_{seuil} d'un métal.

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1

Généralités

a. L'effet photoélectrique s'explique par la théorie ondulatoire de la lumière.
b. L'effet photoélectrique s'explique par la théorie corpusculaire de la lumière.
c. Un photon est un grain de lumière possédant une énergie E = ½ m x v^2.
d. Un photon est un grain de lumière possédant une énergie E = h x v.



Exercice 2

Généralités

a. Une application de l'effet photoélectrique est la cellule photovoltaïque.
b. Une application de l'effet photoélectrique est le laser.
c. L'effet photoélectrique a été découvert par H. Hertz.
d. L'effet photoélectrique a été découvert par A. Einstein.

Exercice 3

Généralités

a. Le bilan énergétique de l'effet photoélectrique s'écrit de la manière suivante :

$$E_{c(électron)}(J) = h(J.s^{-1}) \times \nu(Hz) + W_e(J)$$

b. Le bilan énergétique de l'effet photoélectrique s'écrit de la manière suivante :

$$E_{photon}(J) = E_{c(électron)}(J) + W_{extraction}(J)$$

c. Le rendement d'une cellule phovoltaïque est tel que :

$$\eta = \frac{Puissance\ lumineuse\ (W)}{Puissance\ électrique\ délivrée\ par\ la\ cellule(W)}$$

d. Le rendement d'une cellule phovoltaïque est tel que :

$$\eta = \frac{Puissance\ électrique\ fournie\ par\ la\ cellule\ (J)}{Puissance\ lumineuse\ (J)}$$

Exercice 4

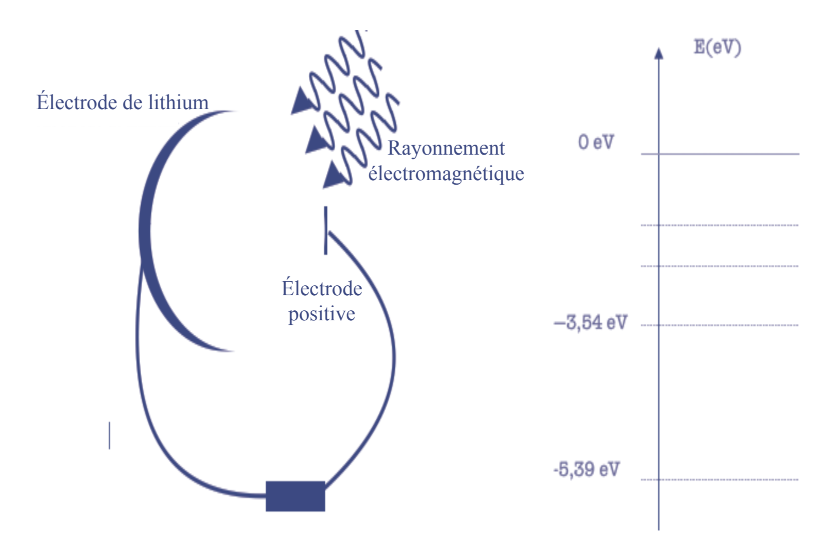
Bilan énergétique

On éclaire une plaque d'argent avec un rayonnement électromagnétique de fréquence $\nu = 1{,}5.10^{15}$ Hz. Un électron est extrait avec une vitesse $v = 8{,}29.10^{5}$ $m.s^{-1}$.

a. L'énergie incidente de ce photon est égale à 6,2 eV.
b. L'électron émis est relativiste.
c. L'énergie d'extraction de l'argent est égale à 2,9 eV.
d. La fréquence de seuil de l'argent est égale à $1{,}0.10^{15}$ Hz.

	V	F
a	▢	▢
b	▢	▢
c	▢	▢
d	▢	▢

PHYSIQUE



Exercice 5

Cellule photoélectrique 1

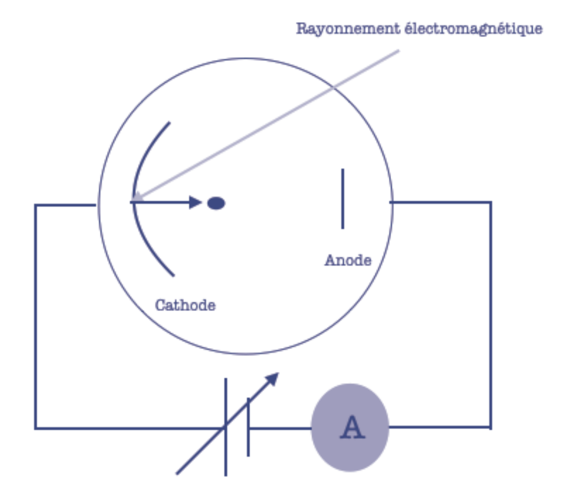
Voici le diagramme énergétique du lithium ainsi qu'une cellule photoélectrique dont l'une des électrodes est constituée du métal lithium.

a. Le rayonnement électromagnétique permet l'extraction d'un proton.
b. Le rayonnement électromagnétique permet l'extraction d'un électron.
c. Le travail d'extraction est égal à 3,54 eV.
d. La longueur d'onde de seuil du lithium est égale à 231 nm et appartient au domaine du visible.

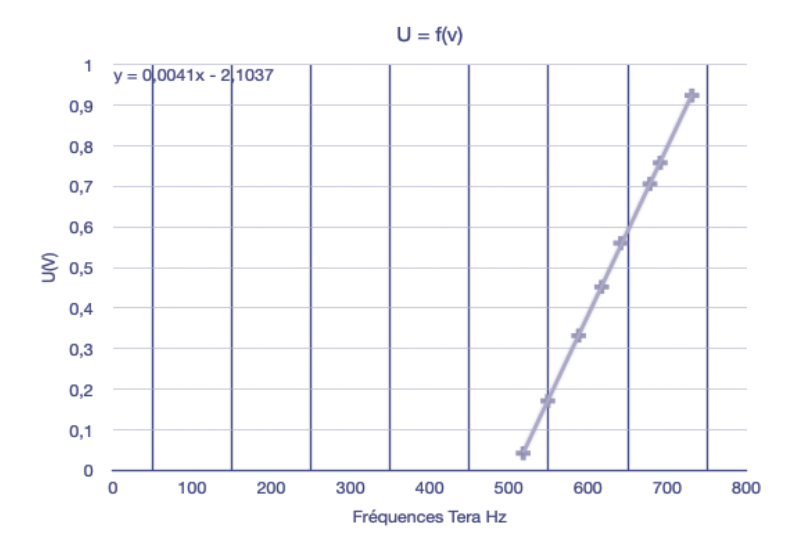
	V	F
a	▢	▢
b	▢	▢
c	▢	▢
d	▢	▢

Énoncé commun aux exercices 6 et 7.

On utilise une cellule photoélectrique au césium.
Pour différentes radiations incidentes, on mesure la tension U qui annule le courant photoélectrique (Tension d'arrêt).



Les mesures permettent de réaliser le graphe suivant :



Exercice 6

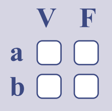
Cellule photoélectrique 2

a. Un photon violet est un photon moins énergétique qu'un photon rouge.

b. La longueur du rouge est moins élevée que la longueur d'onde du violet.

Dans la droite de régression linéaire y = 0,0041.x – 2,10, y représente la tension d'arrêt U et x la fréquence de la radiation en 10^{12} Hz.

1 teraHz est égal à 10^9 Hz.



Exercice 7

Cellule photoélectrique 3

a. Lorsque la tension électrique est égale à la tension d'arrêt, l'énergie cinétique de l'électron est nulle.
b. L'énergie e.U est égale à l'énergie d'extraction de l'électron.
c. L'énergie e.U est égale à l'énergie cinétique de l'électron.
d. À 650 Hz, l'énergie cinétique de l'électron est de 0,6 eV.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

PHYSIQUE

Exercice 8

Un panneau solaire est exposé au soleil de façon à capter le rayonnement solaire. Il est constitué de cellules photovoltaïques qui permettent de transformer l'énergie du rayonnement solaire en énergie électrique. Le rendement de cette conversion énergétique est environ de 10 % en moyenne. Ce panneau solaire est utilisé en générateur électrique de puissance égale à 57W.
Pour 1,0 m^2 de panneau solaire, la puissance de ce transfert vaut 1,0 kW pour un ensoleillement optimum.

a. Le rendement du panneau photovoltaïque est :
ρ = Puissance électrique fournie (W)/Puissance lumineuse reçue (W).
b. La puissance lumineuse est égale à 570 W.
La surface de panneau nécessaire est égale à 5,7 m^2.
d. La surface de panneau nécessaire est égale à 0,57 m^2.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

CORRIGÉS

Exercice 1

a. Faux. L'effet photoélectrique s'explique par la théorie corpusculaire de la lumière.

b. Vrai. Voir réponse précédente.

c. Faux. Un photon est un grain de lumière possédant une énergie E = h.v.

d. Vrai. Voir réponse précédente.

Exercice 2

a. Vrai. Une application de l'effet photoélectrique est la cellule photovoltaïque.

b. Faux. Voir réponse précédente.

c. Vrai. L'effet photoélectrique a été découvert par H. Hertz.

d. Faux. Voir réponse précédente.

Exercice 3

a. Faux. Le bilan énergétique de l'effet photoélectrique s'écrit de la manière suivante :

$$E_{photon}(J) = E_{c(électron)}(J) + W_{extraction}(J)$$

b. Vrai. Voir réponse précédente.

c. Faux. Le rendement d'une cellule photovoltaïque est tel que :

$$\eta = \frac{Puissance\ électrique\ fournie\ par\ la\ cellule\ (J)}{Puissance\ lumineuse\ (J)}$$

d. Vrai. Voir réponse précédente.

Exercice 4

a. Vrai. L'énergie incidente de ce photon est égale à 6,2 eV.

En effet : $E_{photon} = h.v = 6{,}63.10^{-34} \times 1{,}5.10^{15} = 9{,}9.10^{-19}$ J soit 6,2 eV.

b. Faux. Pour être relativiste, l'électron doit avoir une vitesse supérieure ou égale à 1/10e de la vitesse de la lumière dans le vide.

c. Faux. On calcule l'énergie d'extraction de l'argent de la manière suivante :

$$W_{extraction} = E_{photon} - \frac{1}{2}.m_{électron} \times v^2 = h \times v \; - \; \frac{1}{2}.m \times v^2$$

soit

$$W_{extraction} = 6,63.10^{-34} \times 1,5 \times 10^{15} \; - \; \frac{1}{2} \times 9,1.10^{-31} \times (8,29.10^5)^2 = 6,8.10^{-19} J \text{ soit } 4,3 \; eV.$$

d. Vrai. En effet :

$$W_{extraction} = h.\nu_{seuil} \Longrightarrow \nu_{seuil} = \frac{W_{extraction}}{h} = \frac{6,8.10^{-19}}{6,63.10^{-34}} = 1,0.10^{15} Hz$$

Exercice 5

a. Faux. Le rayonnement électromagnétique permet l'extraction d'un électron.

b. Vrai. Voir réponse précédente.

c. Faux. Le travail d'extraction est égal à 5,39 eV.

d. Faux. La longueur d'onde de seuil du lithium est bien égale à 231 nm mais elle appartient au domaine des UV.

Exercice 6

a. Faux. C'est le contraire puis la fréquence du rouge est moins élevée que celle du violet.

b. Faux. La longueur du rouge est plus élevée (environ 700 nm) que la longueur d'onde du violet (environ 380 nm).

c. Vrai.

d. Faux. 1 teraHz est égal à 10^{12} Hz.

Exercice 7

a. Vrai. Lorsque la tension électrique est égale à la tension d'arrêt, l'énergie cinétique de l'électron est nulle.

b. Faux. L'énergie e.U est égale à l'énergie cinétique de l'électron.

c. Vrai. Voir réponse précédente.

d. Faux. Voir graphique. À 650 teraHz, l'énergie cinétique correspond à une tension d'arrêt de 0,6 V. Donc l'énergie cinétique de l'électron est alors égale à e.U = 0,6 eV.

Exercice 8

a. Vrai. C'est une définition.

b. Vrai. La puissance lumineuse est égale à 570 W.

c. Faux. La surface de panneau nécessaire est égale à 0,57 m^2.

d. Vrai. Voir réponse précédente.



ÉTUDE DES SYSTÈMES ÉLECTRIQUES

Je fais le point sur mes connaissances

- Je connais la définition de l'intensité du courant électrique.

$$I(A) = \frac{charge\ électrique\ (C)}{durée(s)} = \frac{Q(C)}{\Delta t(s)}$$

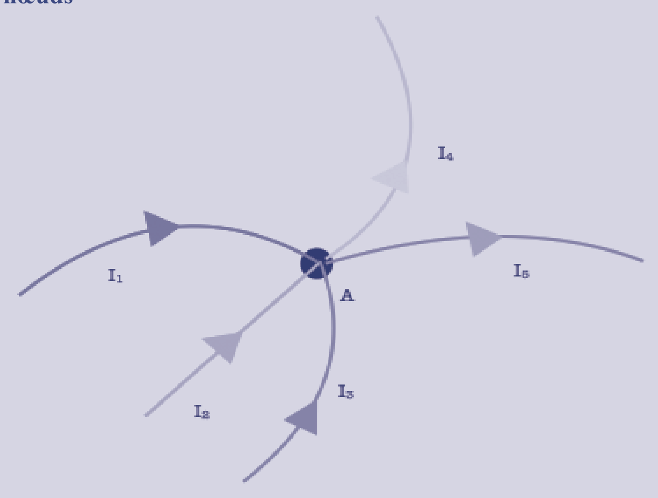
- Je sais que l'intensité électrique est un débit de charges électriques.
- Je sais que l'on mesure une tension électrique avec un ampèremètre branché en série dans le circuit.
- Savoir qu'une tension électrique entre deux points A et B est la différence de potentiel électrique entre ces deux points. La tension électrique entre ces deux points est notée U_{AB}. Elle se mesure en Volt (V).
- On sait que $U_{AB}(V) = V_A - V_B$ où V_A est le potentiel électrique au point A et V_B le potentiel électrique au point B. L'unité du potentiel électrique est le volt.
- Je sais que l'on mesure une tension électrique avec un voltmètre branché en dérivation.
- Je connais les différentes sources de tension (pile, générateur idéal de tension). Je sais faire la différence entre une tension continue et une tension alternative.
- Je sais modéliser le comportement d'une pile : $U_{PN}(V) = E(V) - r(\Omega) \times I(A)$ où E est la force électromotrice de la pile ou sa tension à vide et r la résistance interne de la pile.
- Je connais la relation entre la puissance électrique P(W) et l'énergie électrique $E_{électrique}$ (J).
- $E_{électrique}$ (J) = P(W). $\Delta t(s)$
- Je sais ce qu'est l'effet Joule.

  L'effet Joule est l'énergie dissipée sous forme de chaleur dans une résistance ou conducteur ohmique.
- Je connais les lois sur les intensités électriques et les tensions électriques en régime quasi stationnaire.

  Dans un circuit série, l'intensité est partout la même.

  Un nœud est l'intersection d'au moins trois branches. Une branche est limitée par deux nœuds.

Loi des nœuds



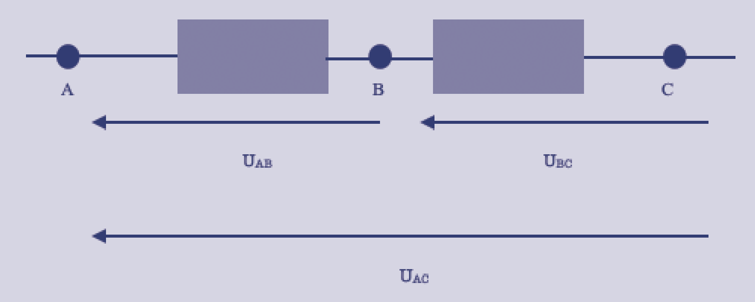
La somme des intensités des courants électriques qui arrivent à un nœud est égale à la somme des intensités des courants qui en ressortent.

En A : $I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5$

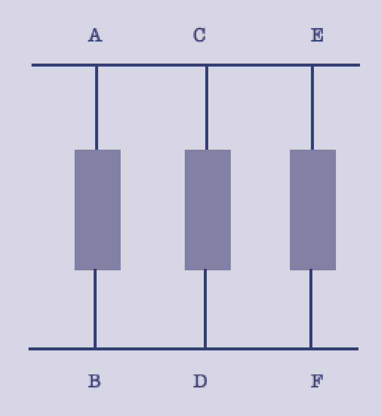
Loi des tensions électriques

$U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$

Dans un circuit en dérivation, les tensions sont égales.

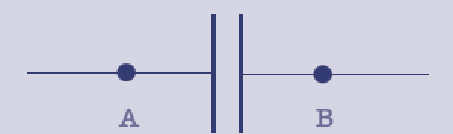


$U_{AB} = U_{CD} = U_{DE}$



Je sais définir

❖ Je sais représenter un condensateur :



❖ Je sais que lorsque le condensateur se charge i > 0, et lorsqu'il se décharge, i < 0.

❖ Je sais que l'intensité du courant électrique dans le cas général est tel que

$$i(A) = \frac{dq(C)}{dt(s)}$$

❖ Je connais la relation entre la charge d'une plaque du condensateur et la tension aux bornes de ce dernier :

$$q_{armature\ A}(C) = C(F) \times u_C(V)$$

❖ Je sais ce qu'est la capacité C d'un condensateur.

❖ Je connais l'unité de la capacité d'un condensateur.

❖ Je sais que la capacité du condensateur plan dépend de sa surface S, de son épaisseur e et de l'isolant caractérisé par sa permittivité de son diélectrique ε.

$$C(F) = \varepsilon(F.m^{-1}) \times \frac{S(m^2)}{e(m)}$$

❖ Je sais définir le temps caractéristique t de charge d'un condensateur.

$$\tau(s) = R(\Omega) \times C(F)$$

Je sais maîtriser

❖ Je sais établir l'équation différentielle relative à la charge d'un condensateur de capacité C lorsqu'il est soumis à une tension électrique E.

$$E = RC\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t)$$

❖ Je sais établir l'équation différentielle relative à la décharge d'un condensateur de capacité C dans une résistance R.

$$0 = RC\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t)$$

❖ Je sais utiliser les conditions initiales permettant de retrouver l'expression de la tension aux bornes du condensateur $u_c(t)$.

– Lors de la charge :

$$u_C(t) = E \times (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

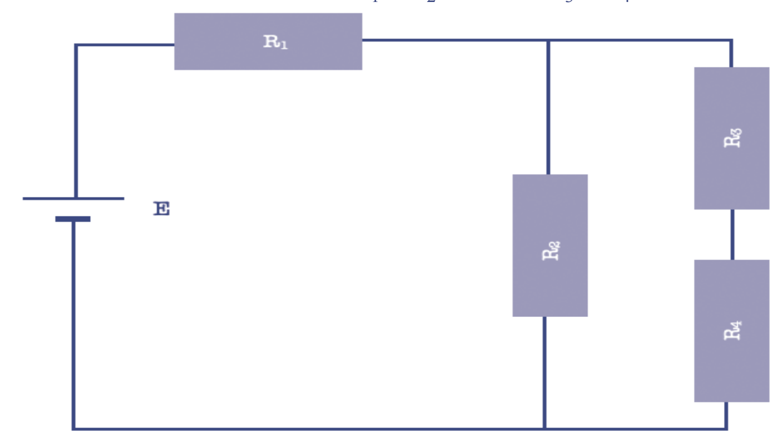
– Lors de la décharge :

$$u_C(t) = E \times e^{-\frac{t}{RC}}$$

ENTRAÎNEMENTS

Énoncé commun aux exercices 1, 2 et 3

On considère le montage suivant où $R_1 = R_2 = 100\ \Omega$, $R_3 = R_4 = 50\ \Omega$ et $E = 9,0$ V.



Exercice 1

Résistances équivalentes

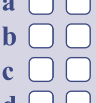
a. La résistance équivalente à R_3 et R_4 est égale à 100 Ω.
b. La résistance équivalente à (R_2, R_3, R_4) est égale à 100 Ω.
c. La résistance équivalente à (R_1, R_2, R_3, R_4) est égale à 150 Ω.
d. La résistance équivalente à (R_1, R_2, R_3, R_4) est égale à 200 Ω.

V F
a
b
c
d

Exercice 2

Loi des nœuds

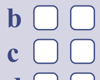
a. L'intensité débitée par la pile est égale à 60 mA.
b. L'intensité du courant circulant dans R_1 est égale à 45 mA.
c. L'intensité circulant dans R_2 est égale à 30 mA.
d. L'intensité circulant dans R_4 est égale à 15 mA.



Exercice 3

Loi des tensions

a. La tensions aux bornes de R_1 est égale à 4,5 V.
b. La tension aux bornes de R_2 est égale à 3,0 V.
c. La tension aux bornes de R_3 est égale à 3,0 V.
d. La tension aux bornes de R_4 est égale à 1,5 V.

Énoncé commun aux exercices 4 et 5.

Un condensateur plan est constitué de deux plaques carrées de côtés a = 1,0 cm. Les deux plaques sont séparées d'une distance d = 7,0 mm. L'intérieur du condensateur est constitué d'un isolant dont la permittivité est $\varepsilon = 3{,}3.10^{-11}$ U.S.I. (unité du système international). Ce condensateur est chargé et la tension à ses bornes est égale à 6,0 V.

PHYSIQUE

Exercice 4

Condensateur plan

a. L'unité légale de la permittivité du vide est F.m.

b. La capacité de ce condensateur est égale à 0,47 pF.

c. La charge accumulée par les deux plaques de ce condensateur est la même et est égale à $2{,}8.10^{-12}$ C.

d. La charge accumulée par les deux plaques de ce condensateur n'est pas la même et est égale en valeur absolue à $2{,}8.10^{-12}$ C.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 5

Décharge d'un condensateur

On décharge ce condensateur dans une résistance R = 10 kΩ.

a. τ a pour unité la seconde.

b. $\tau = 47.10^{-9}$ U.S.I.

c. À la date t = 1,0 ns, la tension aux bornes du condensateur est égale à 4,9 V.

d. À la date t = 1,0 ms, la tension aux bornes du condensateur est égale à 4,9 V.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

CORRIGÉS

Exercice 1

a. Vrai. C'est une association en série de résistance, dans ce cas, elles s'additionnent.

b. Faux. La résistance équivalente à (R_2, R_3, R_4) est égale à 50Ω.

c. Vrai. La résistance équivalente à (R_1, R_2, R_3, R_4) est égale à 150Ω.

d. Faux. Voir réponse précédente.

Exercice 2

a. Vrai. L'intensité débitée par la pile est égale à 60 mA.

b. Faux. L'intensité du courant circulant dans R_1 est égale à 60 mA.

c. Vrai. L'intensité circulant dans R_2 est égale à 30 mA.

d. Faux. L'intensité circulant dans R_4 est égale à 30 mA.

Exercice 3

a. Faux. La tensions aux bornes de R_1 est égale à 6,0 V.

b. Vrai. La tension aux bornes de R_2 est égale à 3,0 V.

c. Faux. La tension aux bornes de R_3 est égale à 1,5 V.

d. Vrai.

Exercice 4

a. Faux. L'unité légale de la permittivité du vide est $F.m^{-1}$.

b. Vrai. La capacité de ce condensateur est égale à 0,47 pF. En effet :

$$C(F) = \varepsilon \times \frac{S}{d} = \frac{3,3.10^{-11} \times (1,0.10^{-2})^2}{7,0.10^{-3}} = 0,47.10^{-12} F = 0,47\ pF$$

c. Faux. La charge accumulée par les plaques de ce condensateur est bien est égale à $2,8.10^{-12}$ C, mais elle est différentes sur chaque plaque.

d. Vrai. En effet :

$$|q_A| = |q_B| = C \times U = 0,47.10^{-12} \times 6,0 = 2,8.10^{-12} C$$

Exercice 5

a. Vrai. τ a pour unité la seconde. On retrouve ce résultat par une analyse dimensionnelle.

b. Faux. $\tau = 4{,}7.10^{-9}$ U.S.I.

c. Vrai. À la date t = 1,0 ns, la tension aux bornes du condensateur est égale à 4,9 V.

d. Faux. À la date t = 1,0 ns, la tension aux bornes du condensateur est égale à 0,0 V.

PARTIE 3

Chimie







Chapitre 1

ACIDE / BASE

Jefaislepointsurmesconnaissances

- Je connais l'échelle de pH des solutions aqueuses.
- Je connais quelques solutions acides et quelques solutions basiques de la vie courante.
- Je sais mesurer le pH avec les bandelettes de pH, avec les indicateurs colorés.
- Je sais dresser un tableau d'avancement d'une réaction.
- Je sais qu'une réaction entre un acide fort et une base forte est une réaction totale et exothermique.
- Je connais les consignes de sécurité lors de la manipulation d'acides et de bases.

Je sais définir

- Je sais définir le pH.
- Je sais définir un acide et une base selon la théorie de Bronsted.
- Je sais ce qu'est un couple acide/base : AH/A.
- Je sais définir la constante d'acidité K_A d'un couple AH/A.
- Je sais définir le pK_A d'un couple AH/A
- Je sais définir le produit ionique de l'eau K_e et le pK_e
- Je sais ce qu'est une réaction totale.
- Je sais reconnaître un acide fort d'un acide faible.
- Je sais reconnaître une base forte d'une base faible.
- Je sais ce qu'est une solution tampon.

Je sais maîtriser

- Je sais mesurer le pH d'une solution.
- Je sais reconnaître un acide ou une base dans une réaction acido-basique.
- Je sais écrire les demi-équations associées au couple AH/A^-.
- Je sais écrire l'équation-bilan d'une réaction acido-basique.
- Je sais reconnaître un acide fort juste par l'information de sa concentration et de son pH.
- Je sais utiliser le diagramme de prédominance.
- Je sais reconnaître une espèce prédominante dans une solution juste par la connaissance de sa concentration et de sa constante d'acidité.

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1

L'acide chlorhydrique

On utilise le gaz chlorure d'hydrogène ($HCl_{(g)}$) pour fabriquer une solution d'acide chlorhydrique de concentration $C = 1{,}0 \cdot 10^{-1}$ mol·L^{-1} et de pH = 1.

a. La concentration en ion oxonium est égale à $[H_3O^+] = 1{,}0 \cdot 10^{-1}$ mol·L^{-1}.
b. La concentration en ion hydroxyde est égale à $[HO^-] = 1{,}0\ 10^{-12}$ mol·L^{-1}.
c. L'acide chlorhydrique peut être considéré comme un acide fort.
d. La base conjuguée de HCl est l'ion HO^-.

Exercice 2

La soude

Une solution de soude (hydroxyde de sodium) de concentration $C = 1{,}0 \cdot 10^{-1}$ mol·L^{-1} a un pH = 13.

a. La concentration en ion oxonium est égale à $[H_3O^+] = 1{,}0 \cdot 10^{-13}$ mol·L^{-1}.
b. La concentration en ion hydroxyde est égale à $[HO^-] = 1{,}0 \cdot 10^{-1}$ mol·L^{-1}.
c. La soude peut être considérée comme une base forte.
d. Le couple associé à cette base est HO^-/H_2O.

Exercice 3

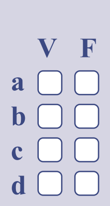
L'acide éthanoïque

L'acide éthanoïque de formule semi-développée : $H_3C-C(=O)OH$ est un acide carboxylique que l'on retrouve dans le vinaigre. Le $pK_A = 4{,}8$.

$H_3C-C(=O)O^-$

Sa base conjuguée est l'ion éthanoate :

a. L'acide éthanoïque est l'acide que l'on retrouve dans le vinaigre.
b. Lorsque le pH d'une solution d'acide éthanoïque est égal à 6, l'espèce prédominante dans la solution est l'acide éthanoïque.
c. Lorsque le pH d'une solution d'acide éthanoïque est égal à 5,8, la concentration de l'acide éthanoïque CH_3COOH est 10 fois plus grande que celle de l'ion CH_3COO^-.
d. Lorsque pH = 4,8 alors $[CH_3COOH] = [CH_3COO^-]$



Exercice 4

L'acide formique

L'acide méthanoïque de formule semi-développée H–C(=O)–OH : est un acide faible. Il est synthétisé par certains insectes comme les abeilles ou les fourmis. Le $pK_A = 2{,}9$.

Données : Le pK_A de ce couple est égal à 2,9.

a. La réaction entre l'acide méthanoïque et l'eau a pour équation :

$$HCOOH + H_2O \longrightarrow HCOO^- + H_3O^+$$

b. Le pH d'une solution aqueuse d'acide méthanoïque est égal à 3,2. La concentration de l'acide méthanoïque est supérieure à celle de l'ion méthanoate.

c. Pour ce même pH, $[H_3O^+] = 6{,}3 \cdot 10^{-4}$ mol·L^{-1}.

d. Un mélange d'un volume $V_1 = 30$ mL d'une solution d'acide méthanoïque de concentration $C_1 = 0{,}10$ mol·L^{-1} et un volume $V_2 = 30$ mL d'une solution de méthanoate de sodium de concentration $C_2 = 0{,}10$ mol·L^{-1}a un pH = 2,9.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

CHIMIE

Exercice 5

Acide aminé

La phénylalanine est un acide α aminé de formule topologique :

a. Cette molécule possède deux groupes caractéristiques : le groupe carboxyle – COOH et le groupe amino $-NH_2$.

b. Cette molécule se comporte à la fois comme un acide et comme une base.

c. Les couples acide/base associés à cette molécule sont : $C_9H_{10}O_2N^+/C_9H_9O_2N$ et $C_9H_9O_2N/C_9H_8O_2\ N^-$.

d. Les pKa des deux couples acide/base de cette espèce chimique valent respectivement 1,83 et 9,13. Lorsque le pH = 5, l'espèce chimique qui est $C_9H_{12}O_2N^+$.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 6

L'ammoniac

On dissout 50 mL de gaz (NH_3) dans 500 mL de l'eau. L'ammoniac est une base de BRONSTED. On mesure le pH de cette solution et l'on trouve une valeur de 8,00. La température du milieu réactionnel est de 20°C. La pression atmosphérique est égale à $1{,}0 \cdot 10^5$ Pa.

Données : R = constante des gaz parfaits = 8,314 U.S.I.

Les couples à considérer sont : $NH_4^+{}_{(aq)}/NH_{3(aq)}$, $H_3O^+{}_{(aq)}/H_2O$ et H_2O/HO^-.





a. L'équation de la réaction est : $NH_{3(g)} + H_3O^+_{(aq)} -> NH_4{+}_{(aq)} + H_2O$.

b. L'avancement maximal de la réaction est $x_{max} = 2{,}05 \cdot 10^{-3}$mol.

c. L'ammoniac est une base forte.

d. Le pKa du couple $NH_4^+{}_{(aq)}/NH_{3(aq)}$ est de 9,2. C'est donc l'ammoniac qui prédomine dans le mélange.

V F
a
b
c
d

Exercice 7

Olympiade de la chimie

Lors d'un projet des olympiades de la chimie, un groupe de quatre élèves propose d'utiliser l'énergie libérée par une réaction acido-basique pour alimenter une pile rechargeable. Ils ont mesuré une augmentation de la température lors d'un mélange de 100 mL d'acide chlorhydrique de concentration $C_1 = 1{,}0$ mol·L^{-1} et un volume $V_2 = 100$ mL d'une solution d'hydroxyde de sodium de concentration $C_2 = 1{,}0$ mol·L^{-1} égale à 40°C.

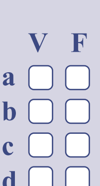
Données : l'énergie libérée lors de la réaction entre une mole d'acide chlorhydrique et une mole d'hydroxyde de sodium est 57 kJ.

a. La réaction est endothermique.

b. L'énergie libérée lors de cette réaction est de 5,7 kJ.

c. La sécurité impose le port de lunettes lors de cette manipulation.

d. Si l'on double la concentration de la solution d'acide chlorhydrique, l'énergie libérée aurait été multipliée par deux.



Exercice 8

Acidose ou alcalose

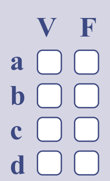
Dans l'organisme, les cellules ont un pH optimal de fonctionnement assez proche du pH plasmatique physiologique (7,40 ± 0,02). Plus on s'éloigne de ce pH et plus le fonctionnement normal des cellules est altéré. Si le pH est inférieur à 7,38, on parle d'acidose, s'il est supérieur à 7,42, on parle d'alcalose. L'un des principaux éléments de l'organisme est constitué des ions phosphate ($H_2PO_4^-/HPO_4^{2-}$). Le pKa de ce couple est égal à 7,20.

a. La relation entre le pH et le pKa de ce couple est : $pH = pKa + log\left(\frac{[H_2PO_4^-]}{[HPO_4^{2-}]}\right)$

b. Lorsque le pH = 7,40, la concentration des ions $[H_2PO_4^-] = 1{,}58.[HPO_4^{2-}]$.

c. Les aliments apportent des ions oxonium $H^+_{(aq)}$. L'équation de la réaction entre ces ions et les ions HPO_4^{2-} est : $H^+_{(aq)} + HPO_4^{2-}{}_{(aq)} -> H_2PO_4^-{}_{(aq)}$.

d. Les ions phosphate ($H_2PO^{4-}{}_{(aq)}$, $HPO_4^{2-}{}_{(aq)}$) constituent un milieu tampon.



Exercice 9

Un antidouleur

On veut extraire l'acide salicylique contenu dans une préparation prescrite (« le synthol ») pour le traitement local des douleurs des muscles.

Première étape : cette étape consiste à alcaliniser la solution hydroalcoolique « synthol ». Pour cela, verser 50 mL de la solution de synthol et rajouter du carbonate de calcium jusqu'à obtention d'un pH = 12.
Deuxième étape : réaliser une extraction liquide-liquide. Introduire la solution de « synthol » dans l'ampoule à décanter et ajouter 20 mL d'éther diéthylique. Séparer les deux phases et garder la phase aqueuse.
Troisième étape : acidifier la phase aqueuse jusqu'à obtenir un pH < 1.
Quatrième étape : introduire de nouveau la solution dans l'ampoule à décanter préalablement nettoyée. Rajouter 20 mL d'éther. Séparer les deux phases.

Nom / Formule brute	Formule semi développée	Masse molaire (g/mol)	Densité	Solubilité
Acide salicylique : $C_7H_6O_3$	O, OH, OH	138,12	1,44	Très soluble dans l'éther
Menthol : $C_{10}H_{20}O$	OH	156,27	1,46	Très soluble dans l'éther et l'acétone
Résorcinol : $C_6H_6O_2$	HO, OH	110,11	1,27	Eau, éthanol

Donnée : pK_A (acide salicylique) = 2,98 (groupe carboxyle).

a. La première étape permet de solubiliser l'acide salicylique et d'obtenir l'ion salicylate dans la phase aqueuse.
b. La deuxième étape permet de séparer les constituants organiques de la préparation et l'ion salicylate.
c. La troisième étape permet de reformer l'acide salicylique.
d. La quatrième étape permet de récupérer l'acide salicylique dans la phase aqueuse.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

CHIMIE

CORRIGÉS

Exercice 1

a. Vrai. L'acide chlorhydrique est un acide fort, il se dissocie totalement dans l'eau. La concentration en ion oxonium est alors égale à la concentration C. Le pH de cette solution est alors égal à 1. pH = − log[H_3O^+] = − log C = − log(1,0.10^{-1}) = 1,0.

$$K_e = \left[H_3O^+\right].\left[HO^-\right] \ donc\ \left[HO^-\right] = \frac{K_e}{\left[H_3O^+\right]} = \frac{10^{-14}}{1,0.10^{-1}} = 1,0.10^{-13} mol.L^{-1}$$

b. Faux. Voir question précédente.

c. Vrai. Voir question précédente.

d. Faux. La base conjuguée de l'acide chlorhydrique est l'ion Cl^-.

Exercice 2

a. Vrai.

b. Faux. La soude se dissocie totalement dans l'eau, donc la concentration en ion hydroxyde est égale à la concentration C de la solution de soude.

c. Vrai. La soude est une base forte car elle se dissocie totalement dans l'eau.

d. Faux. Le couple acide/base associé à la soude est H_2O/HO^-.

Exercice 3

a. Vrai. L'acide éthanoïque est l'acide présent dans le vinaigre.

b. Faux. Le pH > pKa, par conséquent c'est la base qui prédomine.

c. Faux.

$$pH - pKa = 1 = log\frac{\left[CH_3COO^-\right]}{\left[CH_3COOH\right]},\ ainsi\ \left[CH_3COO^-\right] = 10 \times \left[CH_3COOH\right]$$

d. Vrai. Lorsque pH = pKa, alors :

$$pH - pKa = 0 = log\frac{\left[CH_3COO^-\right]}{\left[CH_3COOH\right]},\ ainsi\ \left[CH_3COO^-\right] = \left[CH_3COOH\right]$$

Exercice 4

a. Faux. L'acide méthanoïque est un acide faible. Sa réaction avec l'eau n'est pas totale. Il faut donc une double flèche.

b. Faux. Le pH > pKa, donc c'est la base qui prédomine, donc la concentration de l'ion méthanoate est supérieure à la concentration de l'acide méthanoïque.

c. Vrai. $[H_3O^+] = 10^{-pH} = 10^{-3,2} = 6,3.10^{-4}$ mol.L^{-1}.

d. Vrai. Le mélange considéré constitue un milieu tampon, donc le pH de cette solution est égal au pK_A du couple ($HCOOH/HCOO^-$) = 2,9.

Exercice 5

a. Vrai. Cette molécule possède les groupes caractéristiques : carboxyle et amino.

b. Vrai. Le groupe carboxyle possède un atome d'hydrogène labile. Le groupe amino est une base capable de capter un proton H^+. C'est une espèce amphotère.

c. Faux. La formule brute de cette molécule est : $C_9H_{10}O_2N$. Espèce amphotère, l'acide conjugué est $C_9H_{11}O_2N^+$ et la base conjuguée est $C_9H_9O_2N^-$.

d. Faux. L'espèce chimique qui prédomine est la phénylalanine.

Exercice 6

a. Faux. La réaction a lieu avec l'eau.

b. Vrai. Pour calculer l'avancement maximal de la réaction, on considère la réaction totale. Le réactif limitant est évidemment l'ammoniac. Je calcule la quantité de matière d'ammoniac :

$$n(NH_3) = \frac{p(Pa) \times V(m^3)}{R \times T(K)} = \frac{1,0.10^5 \times 50.10^{-6}}{8,314 \times 293} = 2,053.10^{-3} mol$$

Donc l'avancement maximal $x_{max} = 2,05 \cdot 10^{-3}$mol.

c. Faux. On sait que le pH = 8,00, on peut alors déterminer la concentration en ion oxonium et donc l'avancement final.
$[H3O^+] = 10^{-8}$ mol L^{-1}, donc $[HO-] = 10^{-6}$ mol L^{-1}, donc :

$$n(HO^-) = [HO^-] \times V$$

Et donc, $x_f = n(HO^-) = 10^{-6} \times 0,5 = 5,0.10^{-7} mol < x_{max}$

La réaction n'est donc pas totale, l'ammoniac est une base faible.

d. Faux. pH < pKa, c'est donc l'ion ammonium qui prédomine.

Exercice 7

a. Faux. La réaction libère de la chaleur, elle est donc exothermique.

b. Vrai. Les réactifs sont dans les proportions stœchiométriques :
$n(H_3O^+)=n(HO^-) = C \times V = 1{,}0 \times 0{,}100 = 0{,}10$ mol. L'énergie libérée est donc égale à $Q = n(HO^-) \times 57$ kJ $= 0{,}10 \times 57 = 5{,}7$ kJ.

c. Vrai. Cette manipulation nécessite le port des lunettes et de la blouse.

d. Faux. La quantité de soude n'a pas changé.

Exercice 8

a. Faux. La relation est la suivante

$$pH = pKa + log \frac{[HPO_4^{2-}]}{[HPO_4^-]}$$

b. Faux. En utilisant la relation précédente, on trouve :

$$pH - pK_A = log \frac{[HPO_4^{2-}]}{[H_2PO_4^-]} = 0{,}2 \Longrightarrow [HPO_4^{2-}] = 1{,}58.[H_2PO_4^-]$$

c. Vrai.

d. Faux. Il faut que les quantités de ces deux ions soient égales.

Exercice 9

a. Vrai. On place le milieu réactionnel en milieu basique. Il se produit une réaction acide-base entre le groupe carboxyle de l'acide salicylique et l'ion hydroxyde HO-. Il se forme l'ion salicylate et de l'eau.

b. Vrai. Il s'agit bien d'une séparation de la phase organique et de la phase aqueuse. L'ion salicylate se trouve dans la phase aqueuse.

c. Vrai. On se place de nouveau en milieu acide, l'espèce prédominante est alors l'acide salicylique à condition que le pH < pKa du couple acide salicylique/ion salicylate. À pH < 1, c'est forcément le cas.

d. Faux. Cette fois, on récupère la phase organique, où se trouve l'acide salicylique car l'acide salicylique est très soluble dans l'éther.

Chapitre2

LES DOSAGES

Jefaislepointsurmesconnaissances

- ❖ Je connais la loi des gaz parfaits.
- ❖ Je connais loi de Beer Lambert.
- ❖ Je connais les caractéristiques d'une espèce chimique : masse volumique, densité, température de changement d'état, indice de réfraction.
- ❖ Je sais ce qu'est un indicateur coloré.
- ❖ Je sais ce qu'est un spectre IR, UV-visible.
- ❖ Je connais les groupes caractéristiques.

Je sais définir

- ❖ Je sais définir un dosage par titrage.
- ❖ Je sais définir un dosage par étalonnage.
- ❖ Je sais définir la conductance d'une solution.
- ❖ Je sais définir conductivité d'une solution.
- ❖ Je sais définir l'absorbance d'une solution.
- ❖ Je sais définir la masse volumique, la densité.
- ❖ Je sais qu'une réaction support d'un titrage est une réaction rapide et totale.
- ❖ Je sais reconnaître une réaction acido-basique, une réaction d'oxydoréduction et une réaction de précipitation.
- ❖ Je sais reconnaître un acide fort et acide faible.

Je sais maîtriser

- ❖ Je maîtrise l'utilisation d'un tableur-grapheur.
- ❖ Je maîtrise la construction d'un graphique.
- ❖ Je sais écrire et équilibrer une réaction support d'un titrage.
- ❖ Je sais mesurer le pH d'une solution.
- ❖ Je sais mesurer la masse volumique et la densité d'une solution.
- ❖ Je sais mesurer l'indice de réfraction d'une solution.
- ❖ Je sais mesurer l'absorbance et la conductance d'une solution.
- ❖ Je connais la méthode des tangentes dans le cadre d'un titrage acido-basique.

- Je sais modéliser une courbe avec un logiciel adapté.
- Je sais retrouver la relation entre les quantités de matière de réactifs à l'équivalence d'un dosage.
- Je sais mettre en œuvre un protocole d'expérience(s) permettant de titrer une solution.
- Je sais mesurer l'indice de réfraction d'une solution.
- Je sais mesurer l'absorbance et la conductance d'une solution.

ENTRAÎNEMENTS

CHIMIE

Exercice 1

Questions de cours

Un dosage est une technique utilisée en chimie permettant de déterminer la concentration d'une espèce chimique en solution.

a. La réaction chimique support du dosage doit être totale.

b. Lorsque le dosage se fait par titrage direct, alors la réaction doit être unique.

c. Pour réaliser un dosage, il faut une solution titrante qui doit se trouver dans un erlenmeyer. La solution à titrer se trouve dans la burette graduée.

d. L'équivalence d'un dosage est atteinte lorsque les réactifs sont introduits en quantités égales.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 2

Montage nécessaire pour un dosage

Voici le matériel nécessaire pour réaliser un dosage.

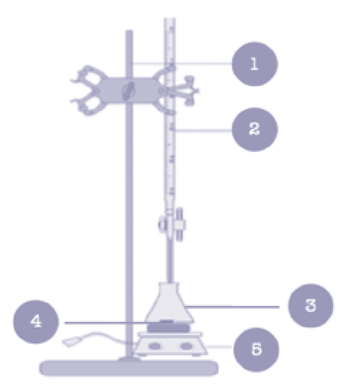
a. (1) désigne le support et (2) désigne la burette.

b. (3) désigne l'erlenmeyer contenant la solution titrante.

c. (4) désigne le turbulent.

d. (5) désigne l'agitateur magnétique.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐



Exercice 3

Conductimétrie

Soit un volume V_1 = 100 mL d'une solution aqueuse S_1 de chlorure de sodium ($Na^+_{(aq)}$, $Cl^-_{(aq)}$) de concentration en soluté $C_1 = 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ mol·L^{-1}. La conductivité σ_1 de cette solution est égale à 0,126 S·m^{-1}. On rajoute à cette solution un volume V_2 = 400 mL d'une solution S_2 de chlorure de sodium de concentration $C_2 = 2{,}0 \cdot 10^{-2}$ mol·L^{-1} et de conductivité σ_2 = 0,252 S·m^{-1}.

a. L'expression de la conductivité de la solution S_1 est :

$$\sigma_1 = (\lambda_{Na^+} + \lambda_{Cl^-}) \times C_1$$

b. Les unités à utiliser sont pour la conductivité : $S{\cdot}m^{-1}$ et pour la conductivité ionique molaire : $S{\cdot}m^2\ mol^{-1}$.

c. La conductivité du mélange de deux solutions est égale à la somme des deux conductivités.

d. La conductivité du mélange est $\sigma_{mélange} = 0{,}378\ S{\cdot}m^{-1}$.

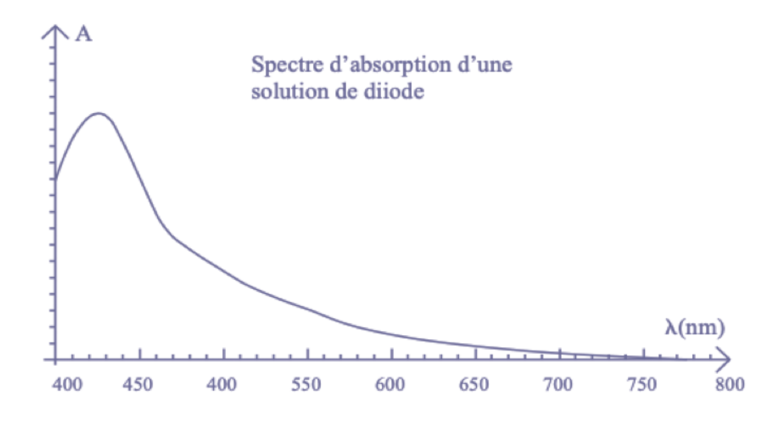
	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 4

Loi de Beer Lambert

	S6	S5	S4	S3	S2	S1
$[I_2]$ mol·L^{-1}	2	5	C_i	20	40	60
A	0,04	0,11	0,22	0,44	0,98	1,3

On dispose d'une solution notée S de diiode de concentration approximative $[I_2] \approx 1{\cdot}10^{-2}$ mol.L^{-1}. On veut déterminer de manière plus précise la concentration de cette solution. Étant colorée, nous allons procéder à un dosage spectrophotométrique par comparaison. Nous utiliserons une solution S_1 de diiode de concentration parfaitement connue notée $C_1 = 1{,}0 \cdot 10^{-1}$ mol·L^{-1}. Cette solution est de couleur marron-brun. À partir de cette solution, nous réalisons une échelle de teintes en pratiquant plusieurs dilutions. Nous mesurons alors l'absorbance des solutions constituant l'échelle de teintes. Voici les mesures.
Pour réaliser ces mesures, nous réalisons le spectre d'absorption de la solution S_1 de diiode. On obtient le spectre de la figure ci-dessous.



Données : loi de Beer-Lambert :

$$A = \varepsilon_\lambda \times l \times C$$

est le coefficient d'extinction molaire relatif à la longueur d'onde λ, l est la largeur ελ de la cuve (m). On notera $k = \varepsilon_\lambda \cdot l$.
Cette loi de Beer-Lambert s'écrira alors : $A = k \cdot (L \cdot mol^{-1}) \cdot C(mol \cdot L^{-1})$. L'absorbance de la solution S est égale à 0,26.

a. Les mesures réalisées permettent de vérifier la loi de Beer-Lambert. Le coefficient k = 22 $L.mol^{-1}$.

b. Une dilution par 10 nécessite l'utilisation d'une pipette de volume V et d'une fiole jaugée de volume 10 × V.

c. La concentration de la solution S_4 est égale à $1{,}0 \cdot 10^{-1}$ $mol.L^{-1}$.

d. Pour réaliser ces mesures d'absorbance, il faut se placer sur une longueur d'onde λ = 430 nm.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

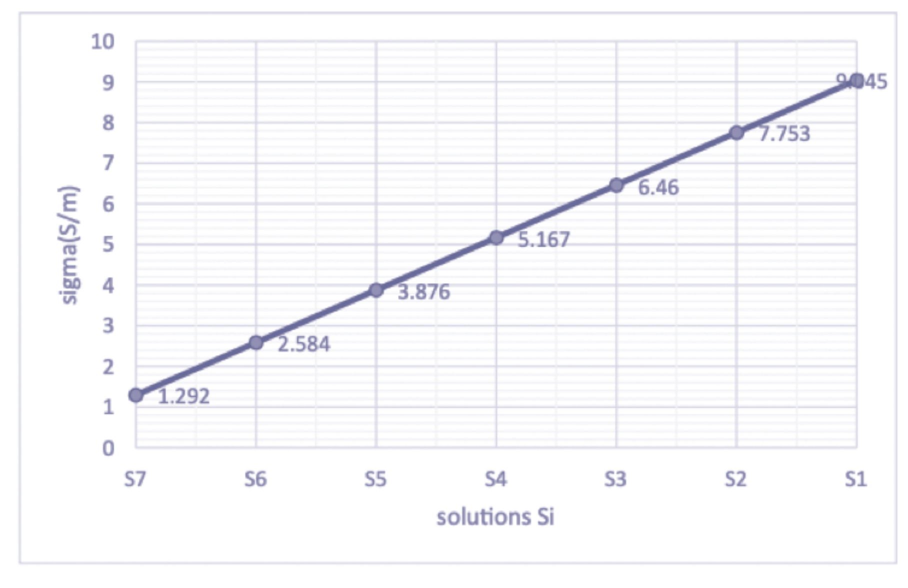
CHIMIE

Exercice 5

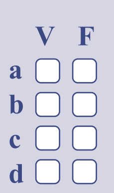
Sérum physiologiste

Nous disposons d'une solution S de sérum physiologique qui est un liquide isotonique au sang, c'est-à-dire qu'il présente la même osmolarité que les liquides corporels. Il est composé d'eau distillée et de chlorure de sodium dont la concentration en masse est comprise entre 8,95 $g.L^{-1}$ et 9,05 $g.L^{-1}$. Nous proposons de vérifier cette indication en réalisant un dosage conductimétrique par comparaison.
Nous allons tout d'abord diluer une solution de chlorure de sodium de concentration $C_1 = 42{,}0$ $g \cdot L^{-1}$, afin d'obtenir six solutions filles notées S_i. Les concentrations de ces solutions seront notées C_i.
Pour chacune de ces solutions, nous allons mesurer leur conductivité notée s. Puis, nous allons construire le graphe $\sigma_i = f(C_i)$.La conductivité de la solution S est mesurée, elle est comprise entre 1,85 $S \cdot m^{-1}$ et 1,95 $S.m^{-1}$.
Données : $\lambda_{Na^+} = 5{,}0$ $mS.m^2.mol^{-1}$. $\lambda_{Cl^-} = 7{,}6$ $mS.m^2.mol^{-1}$.

Graphique : *Courbe d'étalonnage*



a. Pour préparer la solution de concentration S_4 de concentration C_4, il faut réaliser une dilution par 2 de la solution S_1.
b. La concentration de la solution S_3 est égale à 18 $g{\cdot}L^{-1}$.
c. En première approximation, la concentration de la solution S est 8,9 $g{\cdot}L^{-1}$.
d. L'indication donnée par l'étiquette du sérum physiologique est vérifiée à ± 1,0 %.



Énoncé commun aux exercices 6 et 7.

Degré d'un vinaigre

« Le degré d'un vinaigre est la masse d'acide éthanoïque contenue dans 100 g de vinaigre ». Dans cet exercice, nous allons déterminer le degré d'un vinaigre. Le vinaigre sera noté solution S.

Exercice 6

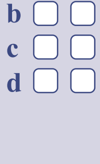
Degré d'un vinaigre 1

Nous prenons une prise d'essais de 1,0 mL de vinaigre que nous allons verser dans un erlenmeyer de 200 mL et nous rajoutons 50 mL d'eau. Nous réalisons un prédosage pour cette prise d'essais à l'aide d'une solution S_B d'hydroxyde de sodium de concentration $C_B = 0{,}100 \pm 0{,}002$ $mol{\cdot}L^{-1}$. Nous rajoutons dans le milieu réactionnel de la phénolphtaléïne. Le changement de couleur intervient pour un volume de soude versé de 15,0 mL.

a. Ce dosage est appelé dosage colorimétrique.
b. L'équation de la réaction chimique support du dosage est :

$$CHCOOH_{(aq)} + HO-_{(aq)} -> CHCOO-_{(aq)} + HO^-_{(aq)}$$

c. La relation à l'équivalence est : $C_A \times V_A = C_B \times V_B$
d. Concernant le dosage, afin de minimiser les erreurs de manipulation, nous voulons un volume équivalent compris en 15 et 20 mL d'hydroxyde de sodium pour une prise d'essai de 5 mL de vinaigre. Nous devons donc diluer 10 fois la solution S.



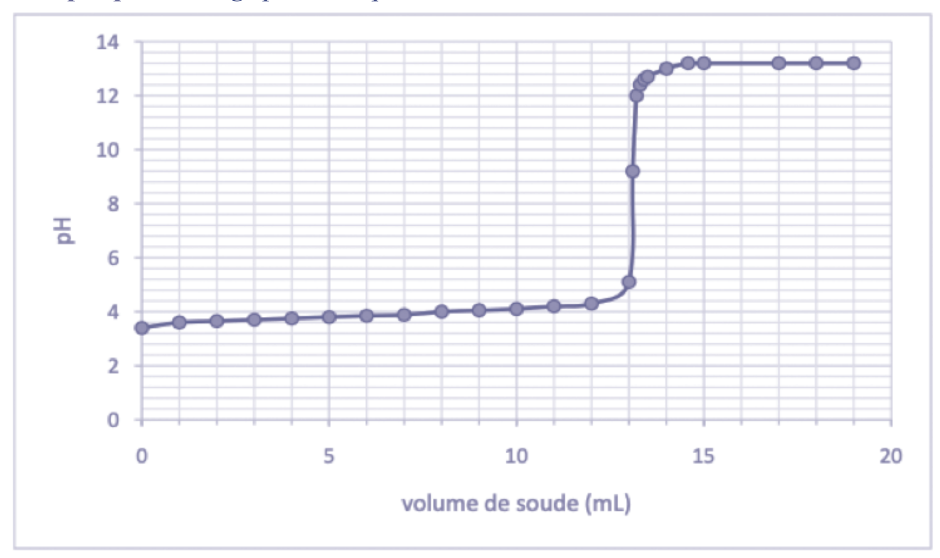
Exercice 7

Degré d'un vinaigre 2

Nous prélevons 10,0 mL de la solution S que nous versons dans une fiole jaugée de 100,0 mL. Puis, nous rajoutons de l'eau distillée jusqu'au trait de jauge. La solution obtenue est notée S'. Nous prélevons alors 10,0 mL de cette solution que nous versons dans un erlenmeyer. Nous rajoutons 50 mL d'eau distillée. Nous titrons ce mélange avec la solution d'hydroxyde de sodium S_B. Cette fois, nous faisons un suivi pHmétrique.

Nous obtenons la courbe de titrage suivante :

Graphique : *Dosage pH-métrique*



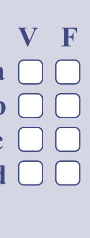
Données : $M(CH_3COOH) = 60{,}0\ g{\cdot}mol^{-1}$.

a. Pour déterminer le volume équivalent, on utilise la méthode des tangentes, et l'on trouve un volume équivalent $V_{eq} = 13{,}0$ mL.±0,2 mL.

b. La concentration de la solution *S* est comprise entre $1{,}27\ mol{\cdot}L^{-1}$ et $1{,}33\ mol.L^{-1}$.

c. Le degré du vinaigre est compris entre 7,68 et 8,04.

d. Une autre méthode existe pour déterminer le point équivalent.



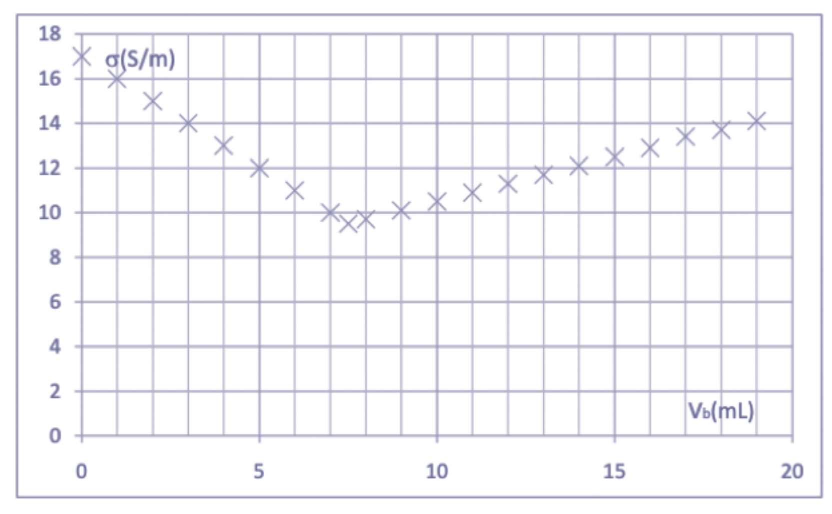
Exercice 8

Dosage d'une solution d'acide chlorhydrique par conductimétrie

On souhaite déterminer la concentration d'une solution d'acide chlorhydrique contenue dans un flacon. Après quelques tests qualitatifs, on montre que cette solution ne contient que de l'eau, des ions chlorure Cl^- et des ions oxonium H_3O^+. On pense alors à un dosage conductimétrique. La solution titrante serait de la soude (hydroxyde de sodium ($Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)}$) de concentration $C_b = 0{,}100 \pm 0{,}001\ mol{\cdot}L^{-1}$. La prise d'essais de la solution d'acide chlorhydrique $C_b = 0{,}100 \pm 0{,}001\ mol{\cdot}L^{-1}$ est de $10{,}00 \pm 0{,}01$ mL. On obtient le graphe $s = f(V_b)$.

Données :

$$\frac{\Delta C}{C} = \sqrt{\left(\frac{\Delta C_b}{C_b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V_{eq}}{V_{eq}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V_{prise\ essai}}{V_{prise\ essai}}\right)^2}$$



$\sigma = f(V_b)$

a. L'équation-bilan du dosage est : $Na^+_{(aq)} + Cl^-_{(aq)} \rightarrow NaCl_{(s)}$

b. Le volume équivalent $V_{éq} = 7{,}5 \pm 0{,}2$ mL.

c. La concentration de la solution d'acide chlorhydrique est égale à $C_A = 0{,}26$ mol.L^{-1}.

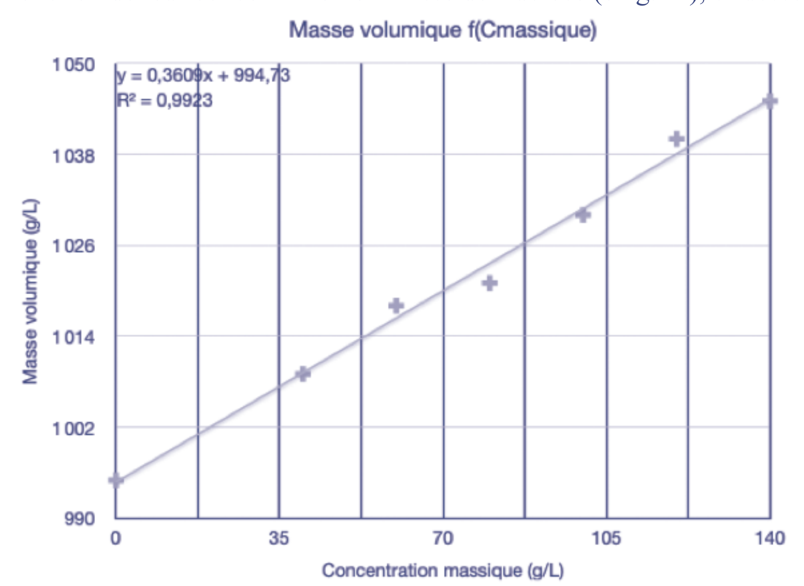
d. L'erreur relative sur cette concentration est inférieure à 5 %.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 9

Jus de fruit

On a mesuré les masses volumiques de solutions étalons de fructose. Les résultats ont permis de construire la courbe de la masse volumique (en g.L^{-1}) des solutions en fonction de leur concentration en masse de fructose (en g.L^{-1}), ci-dessous.



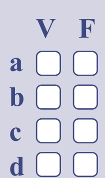
Pour préparer 20,0 mL de solution S_1 de concentration en masse de fructose 50 $g.L^{-1}$ à partir de la solution S_0 de concentration en masse de fructose Cm_0 = 100 $g.L^{-1}$, un laborantin prépare son matériel.

a. Le volume à prélever dans la solution S_0 pour préparer la solution S_1 est de 10,0 mL.

b. Pour prélever ce volume, le laborantin utilise une éprouvette graduée.

c. Cette opération s'appelle une dilution.

d. Un jus de fruit dont le principal soluté est le fructose à une masse volumique de 1 020 $g.L^{-1}$. Sa concentration en masse de fructose de ce jus de fruit.est Cm = 69,3 $g.L^{-1}$.



CHIMIE

Exercice 10

Teneur en sucre du miel

La teneur en sucre du miel, c'est-à-dire son pourcentage en sucre, est l'un des critères de qualité. La teneur en sucre du miel est déterminée à partir de son indice de réfraction. Pour le déterminer, les apiculteurs utilisent un réfractomètre. On mesure l'indice de réfraction de ce miel. n_{miel} = 1,505.

Indice de réfraction n_{miel}	1,45	1,46	1,47	1,48	1,49	1,50	1,51	1,52
Teneur en sucre : t	70	72	75	78	82	85	88	90

a. La relation de Descartes pour la réfraction est la suivante :

$$n_1 \times sin(i) = n_2 \times sin(r)$$

b. La relation entre la teneur en sucre t et l'indice de réfraction n_{miel} du miel est une relation linéaire du type :

$$n_{miel} = 0,0033 \times t_{miel}$$

c. La teneur en sucre de ce miel est égale à 85,5 %.

d. Il s'agit ici d'un dosage par titrage.



CORRIGÉS

Exercice 1

a. Vrai. La réaction support du dosage doit être totale et rapide.

b. Vrai. Sinon on parle de dosage indirect.

c. Faux. C'est généralement le contraire.

d. Faux. L'équivalence est atteinte lorsque les réactifs sont introduits dans les proportions stœchiométriques.

Exercice 2

a. Vrai.

b. Faux. L'erlenmeyer contient la solution titrée et non la solution titrante.

c. Vrai.

d. Vrai.

Exercice 3

a. Vrai. Cette solution n'est constituée que des ions chlorure et sodium. Seuls les porteurs de charges sont pris en compte pour la détermination de la conductivité.

b. Vrai.

c. Faux. La conductivité du mélange n'est pas toujours égale à la somme des conductivités.

d. Faux. La concentration des ions dans la solution a changé.

$$[Na^+] = [Cl^-] = \frac{C_1 \times V_1 + C_2 \times V_2}{V_1 + V_2} = \frac{0,010 \times 0,100 \ + \ 0,020 \times 0,400}{0,100 + 0,400} =$$

$$[Na^+] = [Cl^-] = 1,8.10^{-2} mol.L^{-1}$$

Donc la conductivité de la solution sera :

$$\sigma_{solution} = \frac{\sigma_1}{C_1} \times [Na^+] = \frac{0,126}{0,010} \times 1,8.10^{-2} = 0,227 S.m^{-1}$$

Exercice 4

a. Vrai. Aux incertitudes de mesures près, il y a proportionnalité entre la concentration en diiode et l'absorbance donc les mesures vérifient la loi de Beer Lambert. Pour déterminer la valeur de k, il faudrait faire régression linéaire à l'aide de la calculatrice. On trouve alors k = 22 $L.mol^{-1}$.

b. Vrai.

c. Faux. La concentration de la solution S_4 est la moitié de celle de la solution S_3, Elle est égale à 10 mmol.L^{-1}.

d. Vrai. Pour réaliser ces mesures, on se place au maximum d'absorption. La La valeur de $\lambda_{max} \approx 430$ nm.

Exercice 5

a. Faux. En effet, le rapport des conductivités correspondantes σ_1/σ_4 n'est pas égal à 2.

b. Faux. Elle est de 30 g·L^{-1}. En effet :

$$\frac{\sigma_1}{C_1} = \frac{\sigma_3}{C_x} \Longrightarrow donc\ C_x = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \times C_1 = \frac{6,46}{9,045} \times 42,0 g.L^{-1} = 30,0 g.L^{-1}$$

c. Vrai. En effet, par le même raisonnement, on montre que la concentration de la solution S est bien égale à 8,9 g.L^{-1}.

$$\frac{\sigma_1}{C_1} = \frac{\sigma}{C_x} \Longrightarrow donc\ C_x = \frac{\sigma}{\sigma_1} \times C_1 = \frac{1,90}{9,045} \times 42,0 g.L^{-1} = 8,90 g.L^{-1}$$

d. Faux. La mesure de la conductivité montre que l'erreur commise est égale à

$$\frac{1,95 - 1,90}{1,90} \times 100 = 2,7\%$$

Exercice 6

a. Vrai. C'est un dosage colorimétrique car un changement de couleur de la phénolphtaléïne intervient au cours de ce dosage.

b. Faux.

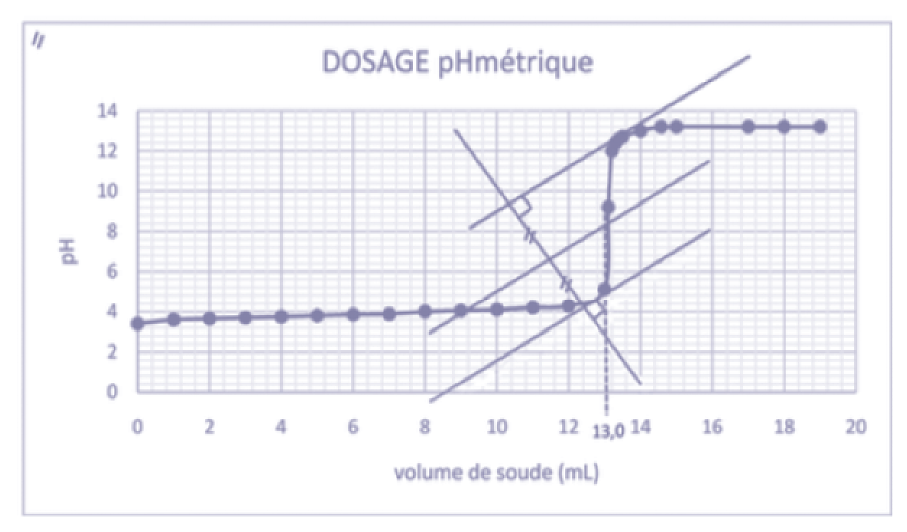
c. Vrai. À l'équivalence de ce dosage, la quantité de matière d'acide contenu dans l'erlenmeyer est égale à la quantité de matière de soude versée. Donc : $n_A = n_B$ donc C_A x $V_A = C_B$ x $V_{Béq}$.

d. Faux. Si la prise d'essai est 5 fois plus grande que celle utilisée dans la première expérience, alors il faut diluer le vinaigre 5 fois.

Exercice 7

Vrai.

Graphique : Dosage pH-métrique.



b. Faux. Si l'on considère le volume équivalent minimal, *Vb* = 12,8 mL, alors en utilisant la relation à l'équivalence et en tenant compte de la dilution, on trouve une concentration de 1,28 mol/L.

$$C_S = 10 \times \frac{0,100 \times 12,8}{10,0} = 1,28\ mol.L^{-1}.$$

On ne tient compte que de l'incertitude sur la détermination du volume équivalent. L'erreur commise sur la concentration de la soude est négligeable.
Puis, si l'on considère le volume équivalent maximal, *Vb* = 13,2 mL, on trouve une concentration C_S = 1,32 mol·L^{-1}. Donc, la concentration de la solution S est comprise entre 1,28 mol.L^{-1} et 1,32 mol.L^{-1}.

c. Vrai. Le degré du vinaigre est bien compris entre 7,68° et 8,04°.

$$\frac{1,28 \times 60}{10} = 7,68g \ \leq degre = \frac{C_S \times M}{10} \leqslant \frac{1,32 \times 60}{10} = 7,92g \leq 8,04$$

On divise par 10, car il s'agit de la masse d'acide pour 100 g de vinaigre.

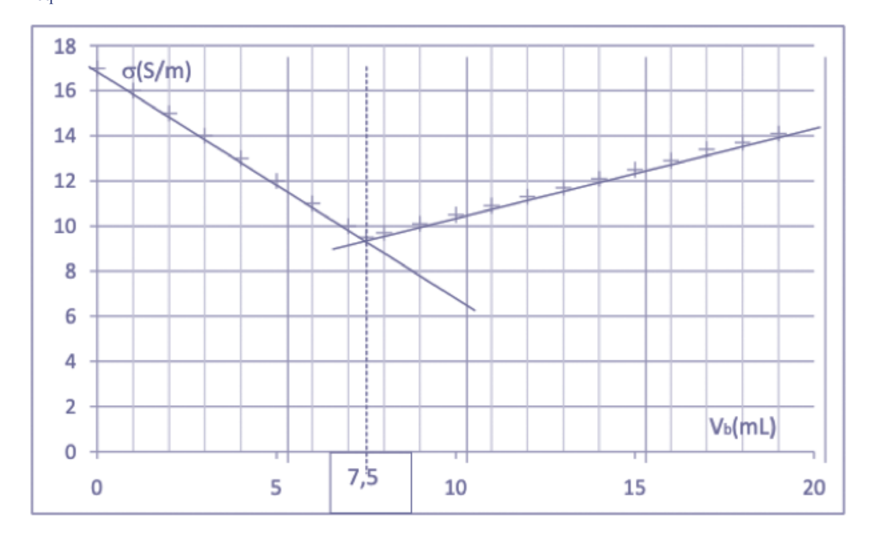
d. Vrai. L'autre méthode permettant de déterminer le volume équivalent est de tracer la courbe : dérivée du pH en fonction du volume.

$$y = \frac{dpH}{dVb}$$

Exercice 8

a. Faux. L'équation du dosage est la suivante : $H_3O^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)} \rightarrow 2H_2O$

b. Faux. Pour trouver le volume équivalent, on trace les deux portions de droites. L'intersection de ces deux droites nous permet de le déterminer.
La valeur du volume équivalent est bonne, c'est l'incertitude donnée qui est trop ambitieuse. On compte une demi-graduation d'incertitude, soit 0,5 mL.
$V_{éq} = 7{,}5 \pm 0{,}5$ mL.



c. Faux. La concentration de la solution d'acide chlorhydrique est :

$$C_A = \frac{C_B \times V_{Beq}}{V_A} = \frac{0,100 \times 7,5}{10,0} = 7,5.10^{-2} mol.L^{-1}$$

d. Faux. Le taux d'incertitude est environ égal à 7 %.

$$\frac{\Delta C_a}{C_a} = \sqrt{\left(\frac{0,5}{7,5}\right)^2 + \left(\frac{0,001}{0,1}\right)^2 + \left(\frac{0,01}{10}\right)^2} \approx \sqrt{\left(\frac{1}{15}\right)^2} = 0,066$$

Exercice 9

a. Vrai. Le volume à prélever dans la solution S_0 pour préparer la solution S_1 est de 10,0 mL.

b. Faux. Pour prélever ce volume, le laborantin utilise une pipette jaugée de 10,0 mL.

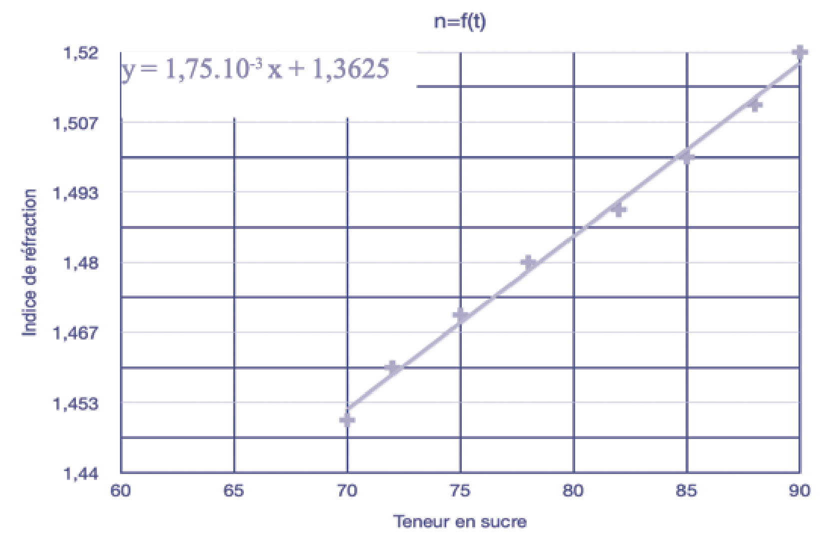
c. Vrai.

d. Faux, sa concentration est Cm = 70,0 g.L^{-1}.
On utilise la régression linéaire : masse volumique ρ(g.L^{-1}) = 0,3609.Cm + 994,73.

Exercice 10

a. Vrai.

b. Faux. Pour répondre à cette question, il faut tracer la courbe n = f(t) à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur et proposer une régression linéaire.



La relation entre la teneur en sucre t et l'indice de réfraction n_{miel} du miel est une relation affine du type :

$$n_{miel} = 1,75.10^{-3}.t_m(g.L^{-1}) + 1,3625$$

c. Faux. Pour cela, on résout :

$$1,505 = 1,75.10^{-3}.t_m(g.L^{-1}) + 1,3625$$

La teneur en sucre de ce miel est égale à 81,4 % et non 85,5 %.

d. Faux. Il s'agit ici d'un dosage par étalonnage.

Chapitre 3

CINÉTIQUE

Je fais le point sur mes connaissances

- Je sais construire un tableau d'avancement.
- Je sais comparer l'électronégativité de deux éléments chimiques.
- Je connais la définition du réactif limitant.
- Je sais construire le schéma de Lewis d'un atome, d'une molécule ou d'un ion.
- Je sais équilibrer une équation d'oxydoréduction.

Je sais définir

- Je connais la définition d'un oxydant. Je connais la définition d'un réducteur. Je sais ce qu'est une réaction d'oxydoréduction.
- Je sais définir l'électronégativité.
- Je sais définir un réactif limitant.
- Je sais définir l'avancement x d'une réaction chimique.
- Je connais les facteurs cinétiques.
- Je sais définir un catalyseur.
- Je sais définir vitesse volumique de disparition d'une réaction.
- Je sais définir la vitesse volumique d'apparition d'un produit.
- Je sais définir le temps de demi-réaction $t_{1/2}$.
- Je sais ce qu'est un acte élémentaire.

Je sais maîtriser

- Je sais retrouver la polarisation dans une molécule.
- Je sais identifier une molécule polaire.
- Je sais faire la différence entre la catalyse homogène et la catalyse hétérogène.
- Je connais les effets de la catalyse.
- Je sais retrouver graphiquement le temps de demi-réaction.
- Je sais comment tracer une flèche courbe dans un mécanisme réactionnel.
- Je sais exploiter la formule définissant la vitesse volumique de réaction :

$$v = \frac{1}{V} \times \frac{dx}{dt}$$

où v est la vitesse de réaction ($mol.m^{-3}.s^{-1}$) ; V est le volume du milieu réactionnel (m^3) et t le temps en seconde (s).

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1

Oxydoréduction

Données : les couples oxydant/réducteur sont : $MnO_4^-{}_{(aq)}/Mn^{2+}{}_{(aq)}$ et $Fe^{3+}{}_{(aq)}/Fe^{2+}{}_{(aq)}$

a. La demi-équation électronique associée au couple $MnO_4^-{}_{(aq)}/Mn^{2+}{}_{(aq)}$

$$MnO_4^-{}_{(aq)} + 8H^+{}_{(aq)} + 5e^- = Mn^{2+}{}_{(aq)} + 4H_2O$$

b. La demi-équation électronique associée au couple $Fe^{3+}{}_{(aq)}/Fe^{2+}{}_{(aq)}$:

$$Fe^{2+}{}_{(aq)} + e^- = Fe^{3+}{}_{(aq)}$$

c. L'équation-bilan de cette réaction est :

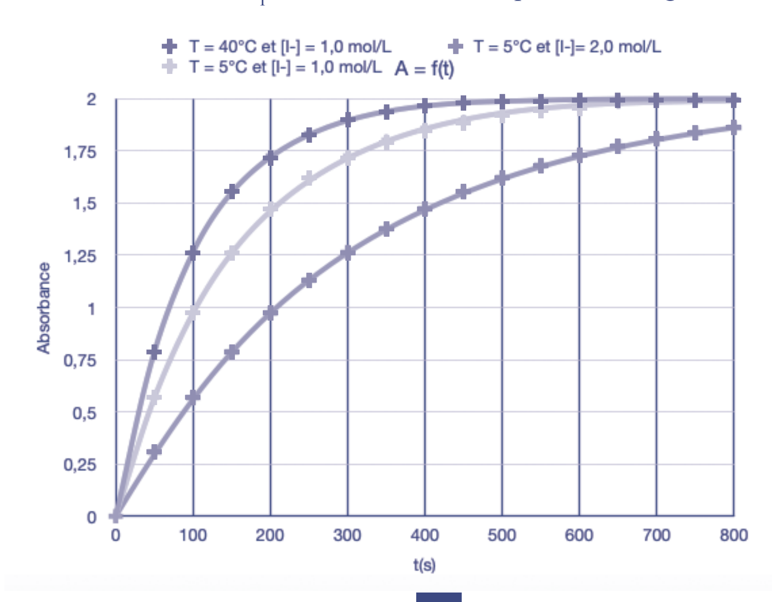
$$MnO_4^-{}_{(aq)} + 8H^+{}_{(aq)} + 5Fe^{2+}{}_{(aq)} \rightarrow Mn^{2+}{}_{(aq)} + 4H_2O + 5Fe^{3+}{}_{(aq)}$$

d. Au cours de cette réaction, il y a eu un transfert d'électrons. Le permanganate MnO_4^- a cédé 5 électrons. Ces derniers ont été captés par l'ion Fe^{2+}.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Énoncé commun aux exercices 2, 3 et 4.

On étudie la cinétique de réaction entre l'eau oxygénée et l'ion iodure en milieu acide. On mélange V_1 = 5,0 mL d'eau oxygénée (H_2O_2) de concentration C_1 = 0,10 mol·L^{-1} et un volume de V_2 = 5,0 mL d'une solution acidifiée d'iodure de potassium. Au cours de la réaction, la solution passe de l'incolore au jaune brun.
On réalise la première l'expérience avec une température T = 40°C pour une concentration en ions iodure égale à 1,0 mol·L^{-1}.
On réalise une deuxième expérience avec une température T = 5,0°C pour une même concentration en ion iodure : I^-.
On réalise une troisième expérience avec une solution d'iodure de potassium ayant une concentration initiale C_1 = 2,0 mol·L^{-1}. La température est égale à 5,0°C.



Exercice 2

Oxydoréduction

a. Les demi-équations électroniques sont : $2I^-_{(aq)} + 2e^- = I2_{(aq)}$
et $H_2O_{2(aq)} + 2H^+_{(aq)} + 2e^- = 2H_2O$.

b. L'oxydant est l'ion iodure et le réducteur est le peroxyde d'hydrogène.

c. L'équation-bilan de la réaction est :
$2I^-_{(aq)} + H_2O_{2(aq)} + 2H^+_{(aq)} \rightarrow I_{2(aq)} + 2H_2O$.

d. Au cours d'une réaction d'oxydoréduction, il y a un échange de proton.

	V	F
a	▢	▢
b	▢	▢
c	▢	▢
d	▢	▢

CHIMIE

Exercice 3

Cinétique

a. Le réactif limitant est l'ion iodure.

b. L'avancement maximal de la réaction est $x_{max} = 5{,}0 \cdot 10^{-4}$ mol.

c. Le temps de demi-réaction est $t_{1/2} = 120$ s.

d. La durée de la réaction la plus rapide est de 600 s.

	V	F
a	▢	▢
b	▢	▢
c	▢	▢
d	▢	▢

Exercice 4

Facteurs cinétiques

a. L'élévation de la température permet d'augmenter la vitesse de réaction.

b. L'élévation de la température change l'avancement maximal de la réaction.

c. L'augmentation de la concentration en eau oxygénée permet d'accélérer la réaction.

d. L'augmentation de la concentration en eau oxygénée change l'avancement maximal de la réaction.

	V	F
a	▢	▢
b	▢	▢
c	▢	▢
d	▢	▢

Exercice 5

Suivi cinétique

On veut suivre la cinétique de la réaction entre le benzoate de benzyle et l'ion hydroxyde. L'équation-bilan de la réaction est donnée ci-après.
Au cours de la réaction, on prélève 1 goutte du milieu réactionnel que l'on dépose sur une plaque de CCM.
On recommence toutes les 2 minutes à 6 reprises. L'éluant choisi est l'éthanol dans l'éther.

a. La tâche correspondant au premier dépôt correspond à l'ester.

b. La tâche correspondant au dernier dépôt correspond à l'ester.

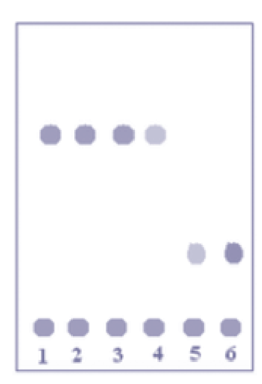
c. C'est une réaction lente.

d. C'est une réaction équilibrée.

	V	F
a	▢	▢
b	▢	▢
c	▢	▢
d	▢	▢

Données :

Composés	Benzoate de benzyle	Benzoate de sodium	Alcool benzylique
Solubilité	Soluble dans l'éthanol et l'éther	Insoluble dans l'éther	Soluble dans l'éthanol et l'éther
	Insoluble dans l'eau	Assez peu soluble dans l'eau	Soluble dans l'éthanol et l'éther



Exercice 6

Catalyse homogène ou hétérogène

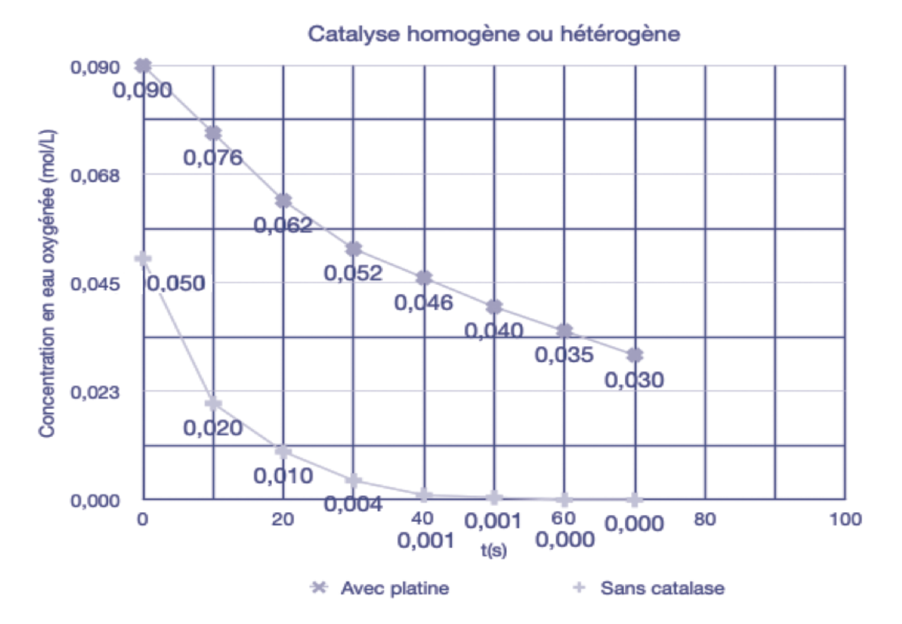
On étudie l'influence de deux catalyseurs sur la décomposition du peroxyde d'hydrogène. La solution commerciale d'eau oxygénée (peroxyde d'hydrogène dans l'eau) est étiquetée 2 Volumes. Pour cela on réalise les réactions suivantes. On verse un volume $V_1 = 50$ mL d'eau oxygénée dans un bécher dans lequel on place un morceau de platine. Dans un deuxième bécher, on verse un volume $V_2 = 50$ mL d'eau oxygénée dans lequel on rajoute de la catalase (enzyme favorisant la décomposition de l'eau oxygénée). Dans les deux cas, l'eau oxygénée se décompose selon la réaction :

$$2\ H_2O_{2(aq)} \rightarrow 2\ H_2O_{(l)} + O_{2(g)}$$

On suit la vitesse de réaction en mesurant le volume de dioxygène produit au cours du temps.

Données : Une dismutation est une réaction au cours de laquelle le réactif est à la fois oxydant et réducteur.

La courbe suivante représente l'évolution de la concentration en peroxyde d'hydrogène au cours du temps.



a. Le peroxyde d'hydrogène subit une dismutation.
b. La catalase est une enzyme qui permet d'accélérer la réaction. Elle est consommée au cours de la réaction.
c. La réaction faisant intervenir le platine est une catalyse hétérogène.
d. La durée de la réaction en présence de catalase est de 40 minutes.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 7

Temps de demi-réaction

Pour calculer la vitesse de réaction à un instant t, on trace la tangente à la courbe $C = f(t)$. on détermine ensuite le coefficient directeur de cette tangente. Lorsque la tangente est positive, la vitesse est la valeur du coefficient directeur. Lorsque la tangente est négative, la vitesse de réaction est la valeur absolue du coefficient directeur de cette tangente. L'unité de cette vitesse doit tenir compte des unités de la concentration et de l'unité de temps dans le graphique.

a. Dans l'exercice précédent la vitesse de réaction lors de la catalyse hétérogène à la date $t = 0$ est $v = 1{,}4.10^{-3}$ mol · L^{-1}· s^{-1}.
b. Cette vitesse croît au cours du temps.
c. Dans la catalyse enzymatique, la vitesse de réaction à la date $t = 0$ est $v = 1{,}4.10^{-3}$ mol · L^{-1}· s^{-1}.
d. Le temps de demi-réaction de cette catalyse enzymatique est environ égal à 40 s.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 8

Des pilules peuvent-elles nous rendre plus heureux ?

> Soit Notre humeur est régulée par la chimie de notre corps, qui varie selon un certain nombre de paramètres extérieurs. Les symptômes relatifs à la dépression peuvent être traités par une médicamentation quotidienne.
> Cette médication agit souvent en contrôlant l'action d'une enzyme, qui est un catalyseur biologique naturel.
>
> Les récepteurs de notre système nerveux central sont analogues aux catalyseurs hétérogènes. Des produits chimiques appelés neurotransmetteurs sont libérés par les neurones (synapses) et se fixent sur d'autres neurones (récepteurs).Lorsque le récepteur a fini d'utiliser le neurotransmetteur, il libère la molécule qui est réabsorbée ensuite par le neurone qui l'a émise, puis est détruite par une autre enzyme appelée monoamine oxydase. Le neurotransmetteur est détruit pour éviter une augmentation continue de sa concentration dans la synapse. Lorsque la concentration des neurotransmetteurs comme la sérotonine ou la dopamine est optimale, il s'en suit une sensation de bien-être.
> La dépression résulte d'une trop faible quantité de ces neurotransmetteurs (dopa- mine, sérotonine...).
> On peut traiter la dépression en inhibant l'action des monoamines oxydases, de façon à éviter la destruction des neurotransmetteurs. Ces médicaments bloquent les sites actifs des enzymes les rendant ainsi inopérables sur les neurotransmetteurs.
>
> *Chimie : molécules, matière, métamorphoses*. Peter ATKINS, Loretta JONES De Boeck Université

Données :

OH, H_2N

Sérotonine

OH, H_3N^+ — OH, H_2N

Couple acide/base

a. La molécule de sérotonine contient deux groupes caractéristiques : le groupe hydroxyle et le groupe amino.
b. Un enzyme est une espèce biochimique capable d'accélérer une réaction chimique.
c. Les récepteurs sont considérés comme des catalyseurs homogènes.
d. La sérotonine est une base.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

CORRIGÉS

Exercice 1

a. Vrai.

b. Faux. $Fe^{3+}_{(aq)} + e^- = Fe^{2+}_{(aq)}$

c. Vrai. Au cours d'une réaction d'oxydoréduction, il doit y avoir le même nombre d'électrons échangés ; Il faut donc ajouter un coefficient 5 devant Fe^{2+} et Fe^{3+}.

$$MnO^-_{4\,(aq)} + 8H^+_{(aq)} + 5e^- = Mn^{2+}_{(aq)} + 4H_2O$$

$$Fe^{2+}_{(aq)} = Fe^{3+}_{(aq)} + 1\ e^-\ x5$$

$$MnO^-_{4\,(aq)} + 8H^+_{(aq)} + 5\ Fe^{2+}_{(aq)} = Mn^{2+}_{(aq)} + 4H_2O + 5\ Fe^{3+}_{(aq)}$$

d. Faux. Il y a bien un transfert d'électrons, l'ion permanganate capte 5 électrons qui sont cédés par les ions Fe^{2+}.

Exercice 2

a. Faux. Les demi-équations électroniques sont : $I_{2(aq)} + 2e^- = 2I^-_{(aq)}$ et $H_2O_{2(aq)} + 2H^+_{(aq)} + 2e^- = 2\ H_2O$.

b. Faux. L'oxydant est le peroxyde d'hydrogène H_2O_2 et le réducteur est l'ion iodure I^-.

c. Vrai. L'équation-bilan de la réaction est :

$$2I^-(aq) + H_2O_{2(aq)} + 2H^+_{(aq)} \rightarrow I_{2(aq)} + 2\ H_2O.$$

d. Faux. Au cours d'une réaction d'oxydoréduction, il y a un échange d'électrons.

Exercice 3

a. Faux. La quantité de matière initiale d'ion iodure est largement supérieure à celle du peroxyde d'hydrogène (H_2O_2 contenu dans l'eau oxygénée). Donc le peroxyde d'hydrogène est limitant.

b. Vrai. L'avancement maximal est donc :

$$x_{max} = n_i\,(H_2O_2) = C \times V = 0{,}100 \times 0{,}0050 = 5{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{mol}.$$

c. Faux. On ne peut répondre à cette question si l'on ne sait pas de quelle réaction il s'agit.

d. Faux. Elle est comprise entre 450 et 550 s.

Exercice 4

a. Vrai. La température est un facteur cinétique.

b. Faux. L'élévation de la température ne modifie que l'avancement maximal de la réaction.

c. Vrai. C'est aussi un facteur cinétique.

d. Vrai. Cela modifie l'avancement maximal de la réaction.

Exercice 5

a. Vrai. Lors des 8 premières minutes, on ne voit qu'une seule tâche, cela ne peut correspondre qu'aux réactifs. Or, les deux réactifs sont le benzoate d'éthyle et la soude. Seul le benzoate d'éthyle est soluble dans le solvant. C'est donc bien une tâche qui correspond au benzoate d'éthyle.

b. Faux. Si cela était le cas, elle serait au même niveau que la première tâche.

c. Vrai. La transformation n'est visible qu'au bout de 10 minutes.

d. Faux. On ne voit qu'une seule tache à chaque fois. Si la réaction était équilibrée, il y aurait présence assez rapidement des réactifs et des produits. Or parmi ceux-ci seuls le benzoate d'éthyle et l'alcool benzylique sont solubles dans l'éluant, il y aurait présence assez rapidement de deux tâches.

Exercice 6

a. Vrai. Au cours de la réaction, le peroxyde d'hydrogène se transforme en dioxygène : $H_2O_2 = O_2 + 2H^+ + 2e^-$. L'eau oxygénée se comporte ici comme un réducteur. Le peroxyde d'hydrogène se transforme aussi en eau :

$$H_2O_{2(aq)} + 2H^+_{(aq)} + 2e^- = H_2O$$

L'eau oxygénée se comporte cette fois comme un oxydant.

b. Faux. Un catalyseur n'est jamais consommé.

c. Vrai. Le platine est à l'état solide dans une solution.

d. Vrai. On constate que la réaction est finie au bout de 40 minutes.

Exercice 7

a. Vrai.

$$v = \frac{0,090 - 0,076}{10} = 0,0014 = 1,4.10^{-3} mol.L^{-1}.s^{-1}$$

b. Faux. Cette vitesse décroît au cours du temps pour s'annuler en fin de réaction.

c. Faux. Elle est plus grande car la vitesse de cette catalyse est plus rapide.

$$v = \frac{0,050 - 0,020}{10} = 0,003\ mol.L^{-1}.s^{-1} = 3.10^{-3} mol.L^{-1}.s^{-1}$$

d. Faux. Le temps de demi-réaction de la catalase est environ égal à 10 secondes.

Exercice 8

a. Vrai.

b. Vrai.

OH ← Groupe hydroxyle

H_2N ← Groupe amino

c. Vrai. (voir texte).

d. Vrai. Elle est capable de capter un proton pour donner :

OH

H_3N^+

Chapitre 4

OXYDORÉDUCTION

Je fais le point sur mes connaissances

- ❖ Je sais construire un tableau d'avancement.
- ❖ Je sais comparer l'électronégativité de deux éléments chimiques.
- ❖ Je sais écrire et équilibrer une équation-bilan de réaction.
- ❖ Je connais l'ion oxonium H_3O^+.
- ❖ Je sais que l'ion oxonium est l'ion H^+ hydraté par une molécule d'eau.
- ❖ Je sais que l'ion H^+ caractérise l'acidité d'une solution.
- ❖ Je connais la relation $pH = -\log[H_3O^+]$.

Je sais définir

- ❖ Je sais définir un oxydant et un réducteur.
- ❖ Je sais définir une réaction d'oxydoréduction.
- ❖ Je sais définir un couple oxydant/réducteur.
- ❖ Je sais définir une espèce chimique amphotère.

Je sais maîtriser

- ❖ Je sais reconnaître un oxydant ou un réducteur dans un couple oxydant/réducteur.
- ❖ Je sais reconnaître une espèce chimique oxydée ou réduite dans une réaction d'oxydoréduction.
- ❖ Je sais écrire une demi-équation électronique pour un couple oxydant/réducteur.
- ❖ Je sais écrire une demi-équation électronique pour un couple oxydant/réducteur faisant intervenir l'ion H^+.

ENTRAÎNEMENTS

Énoncé commun aux exercices 1, 2, 3 et 4.
On plonge une lame de zinc de masse 5,0 g dans une solution de sulfate de cuivre ($Cu^{2+}_{(aq)}$; $SO_4^{2-}{}_{(aq)}$) de volume 50,0 mL et de concentration molaire $C = 1{,}0.10^{-1}$ mol.L^{-1}.
Données : M(Zn) = 65,4 g.mol^{-1} ; M(Cu) = 63,5 g.mol^{-1}.

CHIMIE

Exercice 1

Vocabulaire

a. L'ion Cu^{2+} est réduit.
b. L'ion Zn^{2+} est réduit.
c. Le métal cuivre est oxydé.
d. Le métal zinc est oxydé.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 2

Couples oxydant/réducteur

a. Les couples oxydant réducteurs à envisager sont les suivants : Cu/Cu^{2+}; Zn/Zn^{2+}.
b. Les couples oxydant réducteurs à envisager sont les suivants : Cu^{2+}/Cu ; Zn^{2+}/Zn.
c. La demi-équation électronique concernant l'ion cuivre est la suivante : $Cu^{2+} + 2e^- = Cu$.
d. La demi-équation électronique concernant l'ion cuivre est la suivante : $Cu^{2+} = 2e^- + Cu$.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 3

Équation-bilan

a. L'équation-bilan de cette réaction est la suivant : $Cu^{2+} + Zn = Cu + Zn^{2+}$.
b. L'équation-bilan de cette réaction est la suivant : $Zn^{2+} + Cu = Zn + Cu^{2+}$
c. Le réactif en défaut est le métal zinc.
d. Le réactif en défaut est l'ion cuivre (II).

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 4

Prévisions

a. Il se forme du zinc au cours de cette réaction et la masse formée est de 4,9 g.
b. Il se forme du zinc au cours de cette réaction et la masse formée est de 0,33 g.
c. Il se forme du cuivre au cours de cette réaction et la masse formée est de 5,0 g.
d. Il se forme du cuivre au cours de cette réaction et la masse formée est de 0,32 g.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Énoncé commun aux exercices 5, 6 et 7.

On verse un volume V = 75,0 mL d'une solution de permanganate de potassium acidifiée de volume de concentration C = $1{,}0.10^{-2}$ $mol.L^{-1}$ (solution violette) dans une volume V' = 10,0 mL une solution de sulfate de fer ($Fe^{2+}_{(aq)}$; $SO_4^{2-}{}_{(aq)}$) (solution verte) et de concentration C' = $1{,}0.10^{-2}$ $mol.L^{-1}$. La solution prend une teinte violette.

Données :

Couples : $MnO_4^-{}_{(aq)}/Mn^{2+}_{(aq)}$ et $Fe^{3+}_{(aq)}/Fe^{2+}_{(aq)}$

Exercice 5

Reconnaître l'oxydant et le réducteur

V F





a. L'oxydant est l'ion fer (II).
b. L'oxydant est l'ion permanganate MnO_4^-.
c. L'ion fer (II) a été réduit.
d. L'ion fer (II) a été oxydé.

Exercice 6

Demi-équations

V F







a. La demi-équation associée au couple $MnO_4^-{}_{(aq)}/Mn^{2+}_{(aq)}$ est :

$$MnO_4^-{}_{(aq)} + 4H^+_{(aq)} + 3e^- = Mn^{2+}_{(aq)} + 4H_2O$$

b. La demi-équation associée au couple $Fe^{3+}_{(aq)}/Fe^{2+}_{(aq)}$ est :

$$Fe^{3+}_{(aq)} + e^- = Fe^{2+}_{(aq)}$$

c. L'équation-bilan de la réaction est :

$$MnO_4^-{}_{(aq)} + 4H^+_{(aq)} + 3Fe^{3+}_{(aq)} = Mn^{2+}_{(aq)} + 4H_2O + 3Fe^{2+}_{(aq)}$$

d. L'équation-bilan de la réaction est :

$$MnO_4^-{}_{(aq)} + 8H^+_{(aq)} + 5Fe^{3+}(aq) = Mn^{2+}_{(aq)} + 4H_2O + 5Fe^{2+}(aq)$$

Exercice 7

Bilan de matière

V F
a ☐ ☐
b ☐ ☐
c ☐ ☐
d ☐ ☐

a. La relation permettant de connaître le réactif limitant est la suivante :

$$\frac{n_{initial}(MnO_4^-)}{1} =? \frac{n_{initial}(Fe^{3+})}{3}$$

b. La relation permettant de connaître le réactif limitant est la suivante :

$$\frac{n_{initial}(MnO_4^-)}{1} =? \frac{n_{initial}(Fe^{3+})}{5}$$

c. La concentration finale en ion Fe^{3+} est $[Fe^{3+}] = 1{,}4.10^{-2}$ $mol.L^{-1}$.
d. La concentration finale en ion MnO_4^- est $[MnO_4^-] = 5{,}3.10^{-2}$ $mol.L^{-1}$.

Exercice 8

La rouille

En examinant la carrosserie d'un véhicule ancien, on remarque qu'il y a eu, par endroits, corrosion du fer (rouille). Le fer est oxydé sous l'action des molécules de dioxygène dissoutes dans l'eau.

Données :

Les couples à envisager : $Fe^{2+}_{(aq)}/Fe_{(s)}$; $O_{2(dis)}/H_2O$.

a. La réaction provoquant l'oxydation du fer lors de la formation de la rouille est :

$$Fe^{2+}_{(aq)} + 2H_2O \longrightarrow Fe_{(s)} + O_{2(dis)} + 4H^+_{(aq)}$$

b. La réaction provoquant l'oxydation du fer lors de la formation de la rouille est :

$$Fe_{(s)} + O_{2(dis)} + 4H^+_{(aq)} \longrightarrow Fe^{2+}_{(aq)} + 2H_2O$$

Pour protéger le fer de la corrosion, on peut rajouter un morceau de zinc dans la carrosserie de la voiture. On parle alors d'anode sacrificielle.

c. Le fer est le siège d'une réduction.

d. Le fer est le siège d'une oxydation.

	V	F
a	▢	▢
b	▢	▢
c	▢	▢
d	▢	▢

CHIMIE

Exercice 9

L'eau oxygénée

L'eau oxygénée est une solution aqueuse de peroxyde d'hydrogène H_2O_2, qui est souvent utilisée comme cosmétique pour éclaircir les cheveux par réaction d'oxydoréduction. L'eau oxygénée est instable et se décompose lentement suivant la réaction :

$$2\ H_2O_{2(aq)} \longrightarrow O_{2(g)} + 2\ H_2O_{(l)}$$

Une solution d'eau oxygénée à n volumes peut dégager n litres de dioxygène par litre de solution (volume gazeux mesuré sous la pression P = 101,3 kPa et à la température T = 273,15 K).

Données :

Les couples à envisager sont les suivants : $O_{2(g)}/H_2O_{2(aq)}$ et $H_2O_{2(aq)}/H_2O$.

a. La quantité de matière de dioxygène contenue dans 10,0 L de ce gaz à 0°C est et à la pression P = 101,3 kPa est 44,6 mol.

b. Il s'agit d'une réaction d'oxydoréduction où le peroxyde d'hydrogène H_2O_2 est oxydé.

c. Il s'agit d'une réaction d'oxydoréduction où le peroxyde d'hydrogène H_2O_2 est réduit.

d. La concentration d'une eau oxygénée à 10 volumes C = 0,892 $mol.L^{-1}$.

	V	F
a	▢	▢
b	▢	▢
c	▢	▢
d	▢	▢

CORRIGÉS

Exercice 1

a. Vrai. L'ion Cu^{2+} est réduit.

b. Faux. L'ion Zn^{2+} est un produit de la réaction.

c. Faux. Le métal cuivre est un produit de la réaction

d. Vrai. Le métal zinc est oxydé.

Exercice 2

a. Faux. Les couples oxidant réducteurs à envisager sont les suivants : Cu^{2+}/Cu ; Zn^{2+}/Zn.

b. Vrai. Voir réponse précédente.

c. Vrai. La demi-équation électronique concernant l'ion cuivre est la suivante : $Cu^{2+} + 2e^- = Cu$.

d. Faux.

Exercice 3

a. Vrai. L'équation-bilan de cette réaction est la suivant : $Cu^{2+} + Zn = Cu + Zn^{2+}$.

b. Faux. Voir réponse précédente.

c. Faux. Les coefficients stœchiométriques sont identiques et $n(Zn) > n(Cu^{2+})$.

d. Vrai. Voir réponse précédente.

Exercice 4

a. Faux. Le zinc est un réactif.

b. Faux. Voir réponse précédente.

c. Faux. Il se forme bien du cuivre au cours de cette réaction mais la masse formée est égale à :

$$m_{forme}(Cu) = n(Cu) \times M(Cu) = \left[Cu^{2+}\right] \times V = 0,10 \times 0,050 \times 63,5 = 0,32g$$

d. Vrai. Voir réponse précédente.

Exercice 5

a. Faux. L'oxydant est l'ion permanganate.

b. Vrai. Voir réponse précédente.

c. Faux. L'ion fer (II) a été oxydé.

d. Vrai. Voir réponse précédente.

Exercice 6

a. Faux. La demi-équation associée au couple $MnO_4^-{}_{(aq)}/Mn^{2+}{}_{(aq)}$ est :

$$MnO_4^-{}_{(aq)} + 8H^+{}_{(aq)} + 5e^- = Mn^{2+}{}_{(aq)} + 4H_2O$$

b. Vrai. La demi-équation associée au couple $Fe^{3+}{}_{(aq)}/Fe^{2+}{}_{(aq)}$ est :

$$Fe^{3+}{}_{(aq)} + e^- = Fe^{2+}{}_{(aq)}$$

c. Faux. L'équation-bilan de la réaction est :

$$MnO_4^-{}_{(aq)} + 8H^+{}_{(aq)} + 5Fe^{3+}(aq) = Mn^{2+}{}_{(aq)} + 4H_2O + 5Fe^{2+}(aq)$$

d. Vrai. Voir réponse précédente.

Exercice 7

a. Faux. La relation permettant de connaître la réaction limitante est la suivante :

$$\frac{n_{initial}(MnO_4^-)}{1} = \frac{n_{initial}(Fe^{3+})}{5}$$

b. Vrai. Voir réponse précédente.

c. Faux. La concentration finale en ion Fe^{3+} est $[Fe^{3+}] = 1{,}2.10^{-3}$ mol.L^{-1}. En effet, le réactif limitant est l'ion fer (II). Donc, il est totalement consommé. On a donc $n_{final}(Fe^{3+}) = n_{initial}(Fe^{2+}) = C.V = n_{initial}(Fe^{2+})$.

Et $[Fe^{3+}]_{final} = n_{initial}(Fe^{2+})/V_{total} = 0{,}010 \times 0{,}010/0{,}085$ L $= 1{,}2.10^{-2}$ mol.L^{-1}.

d. Faux. La concentration finale en ion MnO_{4-} est $[MnO_4^-] = 3{,}6.10^{-3}$ mol.L^{-1}.

En effet : $nfinal(MnO_4^-) = nfinal(MnO_{4}\text{-}) - 5.n_{initial}(Fe^{2+})$

$= C.V - C'.V' = 0{,}01 \times 0{,}075 - 0{,}01 \times 0{,}01 = 6{,}5.10^{-4}$ mol.

Ainsi, $[MnO_4^-]_{final} = n_{final}(MnO_4^-)/V_{total} = 6{,}5.10^{-4}$ mol/0,085 L $= 7{,}6.10^{-3}$ mol.L^{-1}.

Exercice 8

a. Faux. La réaction provoquant la rouille est la suivante :

$2Fe_{(s)} + O_{2(dis)} + 4H^+{}_{(aq)} \longrightarrow 2Fe^{2+}{}_{(aq)} + 2H_2O$

b. Faux. Voir réponse précédente.

c. Faux. Le fer est le siège d'une oxydation.

d. Vrai. Voir réponse précédente.

Exercice 9

a. Faux. La quantité de matière de dioxygène contenue dans 10,0 L de ce gaz à 0° et à la pression P = 101,3 kPa est 0,45 mol. En effet :

$$n(O_2) = \frac{P \times V}{R \times T} = \frac{101300 \times 0{,}010}{8{,}314 \times 273{,}15} = 0{,}446 mol$$

CHIMIE

b. Vrai. Il s'agit d'une réaction d'oxydoréduction où le peroxyde d'hydrogène H_2O_2 est oxydé.

c. Vrai. Il s'agit d'une réaction d'oxydoréduction où le peroxyde d'hydrogène H_2O_2 est réduit. Dans cette réaction, le peroxyde d'hydrogène est une espèce chimique amphotère.

d. Vrai. La concentration d'une eau oxygénée à 10 volumes C = 0,892 $mol.L^{-1}$. En effet :

$$n(H_2O_2) = 2 \times n(O_2) = 2 \times 0,446 = 0,892 mol$$

Et cela dans un litre de solution.

Chapitre5 ÉVOLUTION SPONTANÉE D'UN SYSTÈME CHIMIQUE

Jefaislepointsurmesconnaissances

- Je sais construire un tableau d'avancement.
- Je sais comparer l'électronégativité de deux éléments chimiques.

Je sais définir

- Je sais définir l'avancement x d'une réaction chimique.
- Je sais définir un réactif limitant.
- Je sais définir l'avancement maximal x_{max} d'une transformation chimique.
- Je sais définir l'avancement final x_f d'une transformation chimique.
- Je sais définir le quotient Q d'une transformation chimique.

$$\text{Pour la réaction suivante : } aA + bB \longrightarrow cC = dD,$$

$$\text{Le quotient de réaction est } Q_{réaction} = \frac{[C]^c . [D]^d}{[A]^a . [B]^b}$$

- Je sais définir la constante d'équilibre d'une transformation chimique :

$$\text{La constante d'équilibre } K(T) \text{ est telle que : } K(T) = \frac{[C]_{eq}^c . [D]_{eq}^d}{[A]_{eq}^a . [B]_{eq}^b}$$

- Je sais définir le taux d'avancement d'une réaction chimique :

$$\text{taux d'avancement } \tau = \frac{x_{final}}{x_{max}}$$

Je sais maîtriser

- Je sais calculer un quotient Q_r de réaction et une constante d'équilibre K(T).
- Je sais comment évolue une transformation chimique connaissant Q_r et K(T).
- Je sais que la constante d'équilibre ne dépend que de T.
- Je sais calculer le taux d'avancement d'une réaction.
- Je sais distinguer l'avancement maximal x_{max} et l'avancement final x_f.
- Je sais identifier le sens direct ou indirect d'une transformation chimique.

CHIMIE

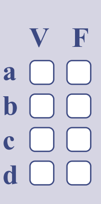
ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1

Tableau d'avancement

On fait réagir 100 g de sodium $Na_{(s)}$ avec 10,0 L de dioxygène $O_{2(g)}$. Il se forme de l'oxyde de sodium $Na_2O_{(s)}$.

Données : M(Na) = 23 $g.mol^{-1}$; M(O) = 32 $g.mol^{-1}$. Le volume molaire dans les conditions de l'expérience est Vm = 24L.mol^{-1}.



a. L'équation-bilan de la transformation décrite ci-dessus est : $Na(s) + O_{2(g)} = 2Na_2O_{(s)}$

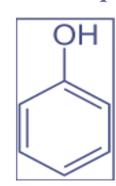
b. Le réactif limitant est le sodium.

c. L'avancement maximal est x_{max} = 1,09 mol.

d. Il s'est formé 51,7 g d'oxyde de sodium au cours de cette transformation.



Quotient de réaction Qr et constante d'équilibre K°(T)



Le phénol est un composé organique moléculaire de formule C_6H_6O, se présentant sous la forme d'un solide cristallin incolore.

Voici quelques données sur le phénol :
- Masse molaire : M = 94,1 $g.mol^{-1}$
- Solubilité massique dans l'eau à 25°C : $s_{massique}$ = 98 $g.L^{-1}$

a. La concentration maximale que l'on peut obtenir en dissolvant du phénol dans l'eau à 25°C est égale à 0,10 $mol.L^{-1}$.

On prépare 100 mL d'une solution aqueuse (S_1) de phénol de concentration C_1 = 0,0200 $mol.L^{-1}$. On mélange un volume V_1 = 20,0 mL de la solution (S_1) avec un volume V_2 = 80,0 mL d'une solution (S_2) de soude (solution d'hydroxyde de sodium, Na^+ et HO^-) de concentration C_2 = 0,0800 $mol.L^{-1}$.

Le pH du mélange est initialement de 7,0.

Il se produit une transformation chimique, modélisable par la réaction d'équation :

$$C_6H_5OH_{(aq)} + HO^-_{(aq)} = C_6H_5O^-_{(aq)} + H_2O_{(l)}$$

Données : le pKa du couple $C_6H_5OH_{(aq)}/C_6H_5O^-_{(aq)}$ vaut 9,95.

La constante d'équilibre associée à cette équation vaut $K° = 1{,}0.10^4$

V F
a
b
c
d

b. Le quotient de réaction à l'instant initial est égal à 0,016.

c. La réaction décrite ci-dessus est une réaction acido-basique.

d. L'équilibre est atteint lorsque la réaction s'arrête.



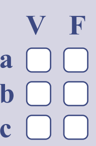
Exercice 3

Sens direct ou indirect ?

a. Revenons à l'exercice précédent, avec les conditions initiales énoncées ci-avant, la réaction évolue dans le sens direct.

b. Les concentrations molaires des espèces chimiques à l'équilibre sont :

$[C_6H_6O]_{éq}$	$[C_6H_5O^-]_{éq}$	$[HO^-]_{éq}$	Eau
Environ 0	$4{,}00.10^{-3}$ mol.L^{-1}.	0,060 mol.L^{-1}.	…



c. Le pH de la solution à l'équilibre est de 10,8.

d. Le pH de la solution à l'équilibre est de 12,8.



Exercice 4

Facteurs cinétiques

Dans l'exercice précédent :

a. L'élévation de la température permet d'augmenter la vitesse de réaction.

b. L'élévation de la température change l'avancement maximal de la réaction.

c. L'augmentation de la concentration en eau phénol permet d'accélérer la réaction.

d. L'augmentation de la concentration en phénol change l'avancement maximal de la réaction.

V F
a ▢ ▢
b ▢ ▢
c ▢ ▢
d ▢ ▢

Exercice 5

Réaction de précipitation

L'ion bromure Br^- et l'ion plomb (II) (Pb^{2+}) réagissent ensemble dans le solvant eau pour donner un précipité de bromure de plomb selon la réaction :

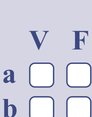
$$Pb^{2+}_{(aq)} + 2Br^-_{(aq)} \leftrightarrows PbI_{2(s)}$$

On introduit dans 1,5 L d'eau :

– 0,020 mol de Pb^{2+}
– 0,040 mol de Br^-.

L'état final, les concentrations valent :

– $[Pb^{2+}]_{éq} = 1{,}18.10^{-2}$mol.L^{-1}
– $[Br^-]_{éq} = 2{,}36.10^{-2}$ mol.L^{-1}.



a. La réaction est totale.

b. Le taux d'avancement est égal à 0,295.

c. La constante d'équilibre est égale à $6{,}6.10^{-6}$.

d. Lorsque l'on double les quantités initiales de réactifs, la constante d'équilibre est doublée.



Exercice 6

Détermination expérimentale d'une constante d'équilibre

L'acide éthanoïque CH_3COOH est un acide faible. On le dissout dans l'eau.
À l'équilibre, on mesure la conductivité de la solution à 25°C. On trouve $\sigma = 1{,}62.10^{-2}$ S.m^{-1} pour un volume de 50,0 mL de solution de concentration molaire en acide éthanoïque C = $1{,}0.10^{-2}$ mol.L^{-1}.

Données à 25°C :

$\lambda(CH_3COO^-) = 4{,}100.10^{-3}$ S.m^2.mol^{-1} ; $\lambda(H_3O^+) = 349{,}8.10^{-3}$ S.m^2.mol^{-1}.

a. L'équation-bilan de la réaction de la réaction de l'acide éthanoïque avec l'eau est : $CH_3COOH + H_2O \leftrightarrows CH_3COO^-_{aq} + H_3O^+$

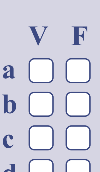
b. L'expression de la conductivité σ à l'équilibre est :

$$\sigma_{solution(équilibre)} = (\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{CH_3COO^-}) \times x_{eq}$$

c. L'expression de la constante d'équilibre est :

$$K°(25°C) = \frac{c - x_{eq}}{x_{eq}^2}$$

d. La constante d'équilibre est égale à K°(25°C) = $2{,}80.10^{-5}$.



Exercice 7

Dissolution du chlorure d'argent dans l'eau

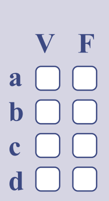
Dans un premier temps on étudie la solubilité du chlorure d'agent dans l'eau.
Données : $K_1°(25°C) = 2{,}0.10^{-10}$: constante d'équilibre de la dissolution du chlorure d'argent dans l'eau. M(Ag) = 107,9 g.mol^{-1}. M(Cl) = 35,5 g.mol^{-1}.

a. L'équation de la réaction de la mise en solution du chlorure d'argent dans l'eau est : $AgCl_{(s)} = Ag^+_{(aq)} + Cl^-_{(aq)}$ (1)

b. Le quotient de réaction associé à cette réaction est égal à : $Q_r = [Ag^+].[Cl^-]$

c. La quantité de chlorure d'argent que l'on peut dissoudre dans 1,0 L d'eau à 25°C est $2{,}0.10^{-10}$ mol.

d. À 25°C, on introduit 1,0 mg de chlorure d'argent dans 1,0 L (solution 1) tout le solide est dissout.



CORRIGÉS

Exercice 1

a. Faux. L'équation-bilan de la transformation décrite est :
$4Na(s) + O_2(g) = 2Na_2O(s)$

b. Faux. Le réactif limitant est le dioxygène. En effet :
$n_{initial}(O_2) = 10,0/24 = 0,417$ mol < ¼ x $n_{initial}(Na) = m/M = 100/23 = 1,09$ mol

c. Faux L'avancement maximal est $x_{max} = 0,417$ mol.

d. Vrai. Il s'est formé 51,7 g d'oxyde de sodium au cours de cette transformation.

Exercice 2

a. Faux. La concentration maximale que l'on peut obtenir en dissolvant du phénol dans l'eau à 25°C est égale à 1,0 $mol.L^{-1}$. En effet : 98/94,1 = 1,1 $mol.L^{-1}$.

b. Faux. On a ainsi pH - pKa = $\log([C_6H_5O^-_{(aq)}]/[C_6H_5OH]) = -2,95$ et donc $[C_6H_5O^-_{(aq)}]_0 = 10^{-2,,95}$x $[C_6H_5OH]_0 = 2,24.10^{-5}$ $mol.L^{-1}$.
On calcule ensuite les concentrations initiales des ions HO^- et du phénol.
$[HO^-]_0 = 0,0800$ x $0,0800/0,100 = 6,40.10^{-2}$ $mol.L^{-1}$.
$[C_6H_6O]_0 = 0,0200$ x $0,010/0,100 = 2,00.10^{-3}$ $mol.L^{-1}$.
On peut alors calculer le quotient de réaction à l'instant initial : $Q_r = [C_6H_5O^-]_0/$ $([C_6H_5OH]_0$x$[HO^-]_0) = 2,24.10^{-5}/(6,40.10^{-2}$ x $2,00.10^{-3}) = 0,175$

c. Vrai. Il y a bien un échange de proton au cours de cette réaction.

d. Faux. L'équilibre est atteint lorsque les réactions dans le sens direct et celle dans le sens indirect se neutralisent.

Exercice 3

a. Vrai. La réaction décrite évolue dans le sens direct car $Q_r < K$.

b. Vrai. La réaction est totale.

$[C_6H_6O]_{éq}$	$[C_6H_5O^-]_{éq}$	$[HO^-]_{éq}$	**Eau**
Environ 0	$4,00.10^{-3}$ $mol.L^{-1}$.	0,060 $mol.L^{-1}$.	…

c. Faux. En effet : $[HO^-] = 0,060$ $mol.L^{-1}$, donc le pH = 12,8.

d. Vrai. Voir réponse précédente.

Exercice 4

a. Vrai.

b. Faux. C'est un facteur cinétique.

c. Vrai. C'est un facteur cinétique.

d. Vrai. L'augmentation de la concentration en phénol change l'avancement maximal de la réaction.

Exercice 5

a. Faux. Les réactifs sont introduits dans les proportions stœchiométriques. Si la réaction était totale, il ne resterait plus de réactifs.

b. Faux. $[Pb^{2+}]_f = (0{,}020\text{-}x_f)/V = (0{,}020\text{-}x_f)/1{,}5 = 1{,}18.10^{-2}$ mol.L^{-1}.
On trouve $x_f = 2{,}3.10^{-3}$ mol. $x_{max} = 2{,}0.10^{-2}$ mol. Cela permet de calculer le taux d'avancement de la réaction à l'équilibre :
$\tau_{max} = x_f/x_{max} = 2{,}3.10^{-3}$ mol$/2{,}0.10^{-2}$ mol $= 0{,}115$.

c. Faux. La constante d'équilibre :

$$K°(T) = \frac{1}{[Pb^{2+}]_f \times [I^-]_f^2} = \frac{1}{1,18.10^{-2} \times (2,36.10^{-2})^2} = 1,5.10^5$$

d. Faux. La constante d'équilibre ne dépend pas des concentrations initiales.

Exercice 6

a. Vrai.

b. Vrai.

c. Faux. L'expression de la constante d'équilibre est :

$$K°(25°C) = \frac{[CH_3COO^-_{aq}]_{eq} \times [H_3O^+_{aq}]\ eq}{[CH_3COOH]_{eq}} = \frac{\frac{x_{eq}^2}{V^2}}{\frac{(c-x_{eq})}{V}} = \frac{x_{eq}^2}{V \times (c - x_{eq})}$$

d. Faux. On calcule tout d'abord l'avancement x_{eq} :

$$x_{eq} = \frac{\sigma}{\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{CH_3COO^-}} = 4,63.10^{-3} mol$$

Puis on calcule la constante d'équilibre K°(25°C) :

$$K°(25°C) = \frac{(4,63.10^{-3})^2}{(0,0500 \times (0,0100 - 4,63.10^{-3})} = 7,97.10^{-2}$$

Exercice 7

a. Vrai.

b. Vrai. L'expression du quotient de réaction associé à cette réaction est : $Q_r = [Ag^+].[Cl^-]$

c. Faux. La quantité de chlorure d'argent que l'on peut dissoudre dans 1,0 L d'eau à 25°C est $1{,}41.10^{-5}$ mol. En effet : à l'équilibre, $Q_r = K_1°(25°C) = 2{,}0.10^{-10} = x^2_{eq}$, donc $x_{eq} = 1{,}41.10^{-5}$ mol.

d. Faux. On calcule la quantité de chlorure d'argent : $n(AgCl) = m/M = 1{,}0.10^{-3}/(107{,}9+35{,}5) = 6{,}97.10^{-6}$ mol. On constate que cette quantité de matière est supérieure à $x_{éq}$, donc la dissolution n'est pas totale.

Chapitre 6

PILES ET ÉLECTROLYSE

Je fais le point sur mes connaissances

- ❖ Je connais la définition d'un oxydant, d'un réducteur.
- ❖ Je connais le modèle de la pile électrochimique.
- ❖ Je sais équilibrer une réaction d'oxydoréduction.
- ❖ Je sais prévoir l'évolution spontanée d'une réaction chimique.
- ❖ Je sais utiliser un tableau d'avancement.
- ❖ Je sais ce qu'est la charge électrique et je connais son unité.
- ❖ Je sais qu'une pile est un générateur électrochimique.

Je sais définir

- ❖ Je sais définir un générateur électrochimique.
- ❖ Je sais définir la charge électrochimique Q(C) = I(A) x t(s)
- ❖ Je sais que l'unité de la charge électrique est le coulomb : (C).
- ❖ Je sais définir la cathode et l'anode d'une pile.
- ❖ Je sais définir la cathode et l'anode d'un électrolyseur.
- ❖ Je sais représenter une pile électrochimique et un électrolyseur.
- ❖ Je connais la pile Daniell.
- ❖ Je connais la constante de Faraday.

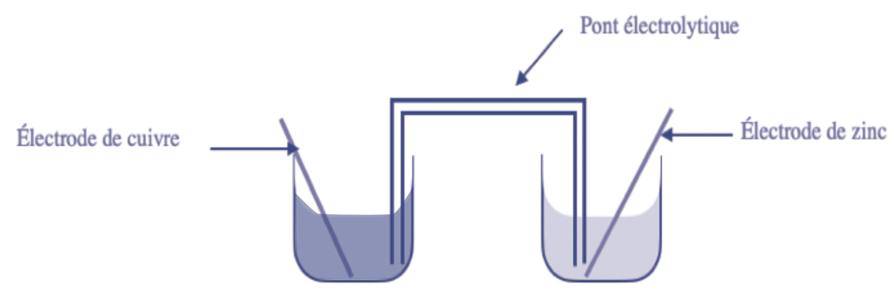
Je sais maîtriser

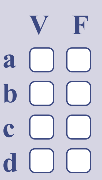
- ❖ Je sais écrire l'équation-bilan de la réaction ayant lieu à une électrode de la pile ou d'un électrolyseur.
- ❖ Je sais écrire l'équation-bilan de fonctionnement d'une pile ou d'un électrolyseur.
- ❖ Je sais calculer la charge électrique ayant circulé pendant une durée t dans un circuit électrique.
- ❖ Je sais calculer une quantité de matière connaissant l'intensité du courant débitée par une pile et la durée de fonctionnement.
- ❖ Je sais calculer une quantité de matière connaissant l'intensité du courant ayant circulé dans un électrolyseur et la durée de fonctionnement.
- ❖ Je sais reconnaître une espèce chimique oxydée ou réduite dans une réaction d'oxydoréduction.
- ❖ Je sais écrire une demi-équation électronique pour un couple oxydant/réducteur.
- ❖ Je sais écrire une demi-équation électronique pour un couple oxydant/réducteur faisant intervenir l'ion H^+.

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1

La pile Daniell





a. La pile Daniell est constituée de deux électrodes, l'une de cuivre et l'autre de zinc. Chacune des électrodes baigne dans une solution de sulfate de cuivre.

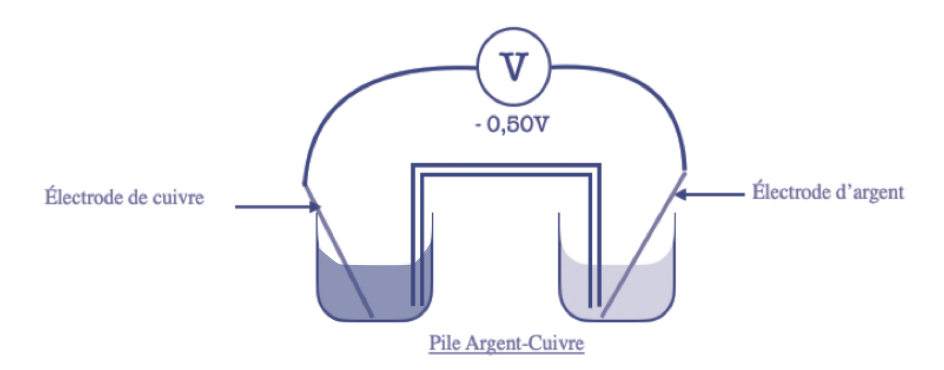
b. Dans la pile Daniell, l'anode est constituée de cuivre.

c. L'électrode de cuivre est le siège d'une réduction.

d. Le pont électrolytique permet la circulation des électrons.

Énoncé commun aux exercices 2,3,4,5 et 6.

Cette pile, constituée d'une électrode de cuivre baignant dans une solution de sulfate de cuivre et d'une électrode d'argent baignant dans une solution de nitrate d'argent, permet d'alimenter une petite diode électroluminescente dont la tension nominale est de 0,50 V et une intensité nominale de 10 mA. Cette diode éclaire normalement pendant 30 minutes.



Exercice 2

Réactions aux électrodes

a. La réaction se déroulant à l'anode est la suivante : $Ag_{(s)} = Ag^{+}_{(aq)} + 1\ e^{-}$

b. La réaction se déroulant à l'anode est la suivante : $Cu_{(s)} = Cu^{2+}_{(aq)} + 2\ e^{-}$

c. La réaction se déroulant à la cathode est la suivante : $Ag^{+}_{(aq)} + 1\ e^{-} = Ag_{(s)}$

d. La réaction se déroulant à la cathode est la suivante : $Cu^{2+}_{(aq)} + 2\ e^{-} = Cu_{(s)}$

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

CHIMIE

Exercice 3

Charge et énergie

a. L'équation-bilan de fonctionnement de cette pile est :

$2Ag^{+}_{(aq)} + Cu_{(s)} \longrightarrow 2Ag_{(s)} + Cu^{2+}_{(aq)}$

b. La charge électrique ayant circulé dans cette diode est égale à 0,30 C.

c. L'énergie fournie par cette pile est égale à 9,0 J.

d. La quantité de matière d'électrons ayant circulé dans les fils est $9{,}3.10^{-5}$ mol.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 4

Perte de masse et gain de masse

a. L'électrode d'argent voit sa masse diminuer de 20 mg.

b. L'électrode d'argent voit sa masse augmenter de 20 mg.

c. L'électrode de cuivre voit sa masse augmenter de 12 mg.

d. L'électrode de cuivre voit sa masse diminuer de 12 mg.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 5

Quotient de réaction

La constante d'équilibre K de la réaction suivante :

$2Ag^{+}_{(aq)} + Cu_{(s)} \longrightarrow 2Ag_{(s)} + Cu^{2+}_{(aq)}$

est égale à 40 à 25°C. À l'état initial, la concentration C_1 de la solution de sulfate de cuivre est égale à $1{,}0.10^{-1}$ mol.L^{-1} et la concentration initiale de la solution de nitrate d'argent est égale à $C_2 = 1{,}0.10^{-2}$ mol.L^{-1}.

a. Le quotient de réaction de fonctionnement de la pile est égal à $Q_r = 1{,}0.10^{-3}$.

b. Le quotient de réaction de fonctionnement de la pile est égal à $Q_r = 1\ 000$.

c. Le quotient de réaction de fonctionnement de la pile est égal à $Q_r = 10$.

d. Le quotient de réaction de fonctionnement de la pile est égal à $Q_r = 0{,}10$.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 6

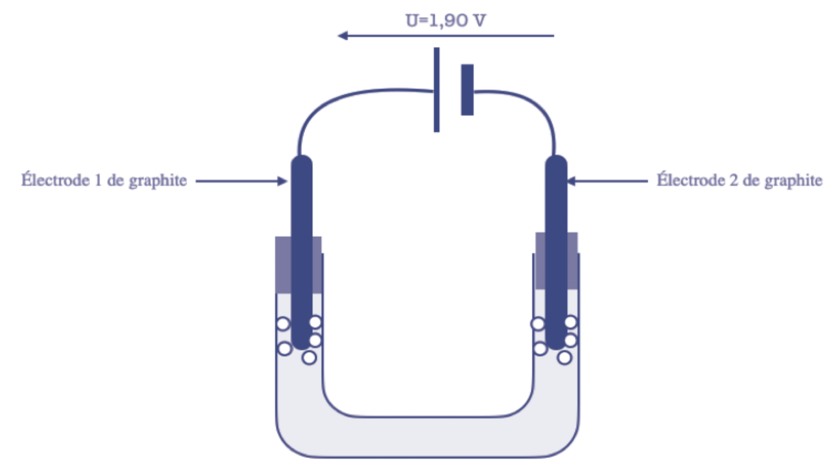
Constante d'équilibre

a. La réaction précédente évolue dans le sens indirect.
b. La réaction précédente évolue dans le sens direct.
c. En augmentant la concentration de la solution de nitrate d'argent, l'équilibre est déplacé dans le sens direct.
d. En diminuant la concentration de la solution de nitrate d'argent, l'équilibre est déplacé dans le sens direct.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Énoncé commun aux exercices 7,8 et 9.

On procède à l'électrolyse de l'eau en milieu acide. Le montage est proposé ci-dessous.



Solution d'acide chlorhydrique C = 1,0 mol.L^{-1}.

Les équations aux électrodes sont les suivantes :

– $2H_2O + 2e^- = H_2(g) + 2HO^-(aq)$

– $2H_2O = O_{2(g)} + 4H^+_{(aq)} + 4e^-$.

L'intensité débitée par la pile est de 1,5 A.

Exercice 7

Électrolyse de l'eau

a. L'électrode 1 est le siège de l'oxydation de l'eau.
b. L'électrode 2 est le siège de l'oxydation de l'eau.
c. Il se forme du dioxygène à l'anode.
d. Il se forme du d'hydrogène à l'anode.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 8

a. Le volume de d'hydrogène est le double du volume de dioxygène produit.
b. Le volume de dioxygène est le double du volume de d'hydrogène produit.
c. La charge ayant circulé dans cet électrolyseur pendant 30 minutes est de 45 C.
d. L'énergie produite par cette pile pendant 30 minutes est égale à 5 130 J.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 9

a. Si le milieu n'est pas acidifié, l'électrolyse peut quand même se dérouler.
b. Si le milieu n'est pas acidifié, l'électrolyse ne peut pas se dérouler.
c. L'électrolyse de l'eau est une transformation spontanée.
d. L'électrolyse de l'eau est une transformation forcée.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

CORRIGÉS

Exercice 1

a. Faux. Elles baignent dans des solutions différentes.

b. Faux. L'anode est le siège d'une oxydation. Il s'agit donc ici de l'oxydation du métal zinc.

c. Vrai. L'électrode de cuivre est le siège d'une réduction. Il s'agit donc de la réduction de l'ion cuivre (II).

d. Faux. Il permet un transfert de masses.

Exercice 2

a. Faux. L'anode est le siège d'une oxydation, il s'agit donc de l'oxydation du cuivre, soit : $Cu_{(s)} = Cu^{2+}_{(aq)} + 2\ e^-$

b. Vrai. Voir réponse précédente.

c. Vrai. La cathode est le siège d'une réduction, donc $Ag^+_{(aq)} + 1\ e^- = Ag_{(s)}$

d. Faux. Voir réponse précédente.

Exercice 3

a. Vrai. L'équation-bilan de fonctionnement de cette pile est :
$2Ag^+_{(aq)} + Cu_{(s)} \longrightarrow 2Ag_{(s)} + Cu^{2+}_{(aq)}$

b. Faux. La charge électrique ayant circulé dans cette diode est égale à :
Q(C) = I(A) x t(s) = 0,010 x 30 x 60 = 18 C.

c. Vrai. L'énergie fournie par cette pile est égale à 9,0 J. En effet :
E(J) = P(W) x t(s) = U(V)x I(A)x t(s) = U(V)x Q(C) = 0,5 x 18 = 9,0 J.

d. Faux. La quantité de matière d'électrons ayant circulé dans les fils est telle que :
Q(C) = n(e) x F, avec F = constante de Faraday = 96 500 U.S.I. à 25°C.
Donc n(e) = Q/F = 18/96 500 = $1{,}9.10^{-4}$ mol.

Exercice 4

a. Faux. L'électrode d'argent voit sa masse augmenter de 20 mg. En effet, l'électrode d'argent voit sa masse augmenter $Ag^+_{(aq)} + 1e^- = Ag_{(s)}$.
m(Ag) = n(Ag) x M(Ag) = n(e) x M(Ag) = $1{,}9.10^{-4}$ x 107 = $2{,}0.10^{-2}$ g = 20 mg.

b. Vrai. Voir réponse précédente.

c. Faux. L'électrode de cuivre voit sa masse diminuer de 24 mg. En effet, l'électrode d'argent voit sa masse augmenter $Cu_{(s)} = Cu^{2+}_{(aq)} + 2e^- = Ag_{(s)}$.
m(Cu) = n(Cu) x M(Cu) = 2 x n(e) x M(Ag) = 2 x $1{,}9.10^{-4}$ x 63,5 = $2{,}4.10^{-2}$ g = 24 mg.

d. Faux. Voir réponse précédente.

Exercice 5

a. Faux.

$$Q_{r_0} = \frac{[Cu^{2+}]_0}{[Ag^+]_0^2} = \frac{0,10}{0,010^2} = 1000$$

b. Vrai. Voir réponse précédente.

c. Faux. Voir réponse précédente.

d. Vrai. Voir réponse précédente.

Exercice 6

a. Vrai. En effet : $Q_{r0} > K(T)$.

b. Faux. Voir réponse précédente.

c. Vrai. En augmentant la concentration de la solution de nitrate d'argent, on diminue le rapport.

$$Q_{r_0} = \frac{[Cu^{2+}]_0}{[Ag^+]_0^2}$$

et l'équilibre est déplacé dans le sens direct.

d. Faux. Voir réponse précédente.

Exercice 7

a. Vrai. L'électrode 1 est positive, elle est donc le siège d'une oxydation de l'eau. C'est l'anode.

b. Faux. Voir réponse précédente. L'électrode 2 est le siège de la réduction de l'eau.

c. Vrai. Il se forme du dioxygène à l'anode.

d. Faux. Voir réponse précédente.

Exercice 8

a. Vrai. Il suffit de vérifier le coefficient stoechiométrique de la réaction modélisant l'électrolyse de l'eau : $H_2O = H_2(g) + 1/2\ O_2(g)$.

b. Faux. Voir réponse précédente.

c. Faux. La charge ayant circulé dans cet électrolyseur pendant 30 minutes est de 2 700 C.

Q(C) = I(A) x t(s) = 1,5 x 30 x 60 = 2 700 C.

d. Vrai. E(J) = Q(C) x U(V). L'énergie produite par cette pile pendant 30 minutes est bien égale à 5 130 J.

Exercice 9

a. Faux. Le milieu acide permet le passage du courant.

b. Faux. Voir réponse précédente.

c. Faux. C’est une transformation forcée puisqu’il faut lui apporter de l’énergie.

d. Vrai. Voir réponse précédente.

PARTIE 4

Biologie





Programme commun aux spécialités «Biologie-Ecologie» et «Sciences de la Vie et de la Terre» sur lequel porte le concours

Spécialité Biologie-Écologie

Spécialité Science et Vie de la Terre

Écosystème et biodiversité

Alimentation, microbiote et santé

Système nerveux et addiction

Accès aux ressources, biodiversité, reproduction et répartition

Génétique et santé

Immunité, cancer et santé

Les muscles

Le système nerveux

Dynamique interne de la Terre et géologie

Évolution du génome

Reproduction des plantes

Étude de la roche et du climat

Chapitre 1 GÉNÉTIQUE ET DIVERSIFICATION DES GÉNOMES

Jefaislepointsurmesconnaissances

- Dans tout cycle de reproduction sexuée, il y a alternance entre une phase diploïde et une phase haploïde. La méiose permet le passage de l'état diploïde à l'état haploïde, tandis que la fécondation rétablit la diploïdie.
- Méiose et fécondation sont les événements fondamentaux et complémentaires de toute reproduction sexuée. L'alternance de ces deux phases permet de constituer de nouveaux assortiments chromosomiques tout en assurant le maintien du caryotype de l'espèce. L'importance relative de chacune des phases varie suivant les espèces.
- La méiose, qui succède à une phase de réplication de l'ADN, est un ensemble de deux divisions cellulaires successives : une cellule diploïde forme ainsi quatre cellules haploïdes possédant le même nombre de chromosomes (n), mais possédant chacune un assortiment d'allèles différents qui permettent à une espèce de posséder des individus de génotypes différents.
- Pendant l'anaphase de la 1re division méiotique, les chromosomes homologues migrent aléatoirement vers l'une ou l'autre cellule fille : c'est le **brassage interchromosomique** qui assure 2^n combinaisons différentes de chromosomes dans les gamètes (où n est le nombre de chromosomes différents. Chez l'Homme, n = 23).
- Pendant la prophase de la 1re division méiotique, des fragments de chromatides sont échangés par *crossing-over* entre deux chromosomes homologues (« les bivalents ») : c'est le **brassage intrachromosomique** qui est aléatoire et systématique.
- Ces deux brassages associés aux mutations, elles aussi aléatoires, ainsi qu'à d'autres évènements plus rares (duplication génique…) permettent de produire une quantité quasiment infinie de gamètes, ce qui rend unique chaque zygote d'un couple et donc chaque individu.

Je sais définir

- Autosome, hétérosome, méiose, réplication, fécondation, caryogamie, gamète, zygote.
- Diplonte, haploïde, caryotype, chromosomes homologues.
- Gène, allèle, dominant, récessif, homozygote, hétérozygote.
- Brassages génétiques intra et interchromosomiques, *crossing-over*, croisement test.
- Duplication d'un gène, famille multigénique.

Je sais maîtriser

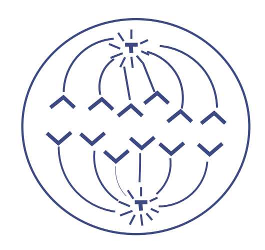
- Les différentes étapes de la méiose et de la fécondation ainsi que les phénomènes cellulaires et génétiques qui s'y produisent.
- L'analyse statistique des produits de méiose et des produits de fécondation.



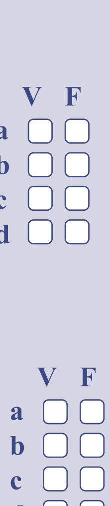
ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1

Document 1 :



a. Ce schéma représente un noyau en anaphase de mitose.
b. Ce schéma représente une cellule diploïde de formule chromosomique 2n = 3.
c. Ce schéma représente une cellule diploïde de formule chromosomique n = 6.
d. Les microtubules sont tous fixés aux centromères des chromosomes.



Exercice 2

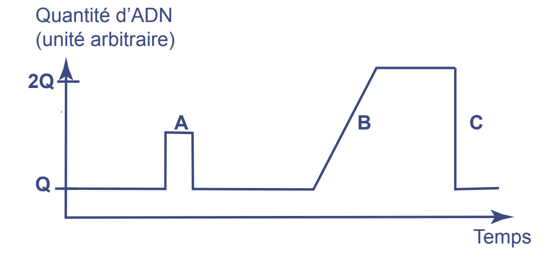
À l'issue de la phase S :
a. Les cellules humaines possèdent 96 chromosomes.
b. Les cellules humaines possèdent 96 chromatides.
c. Les cellules humaines possèdent 2n = 46.
d. Les cellules humaines possèdent 4n = 96.

Exercice 3

La formule chromosomique chez l'Homme :
a. Du noyau du spermatozoïde est n chromosomes à une chromatide, soit 23 molécules d'ADN.
b. Du premier globule polaire est de 46 molécules d'ADN.
c. Du deuxième globule polaire est de 46 molécules d'ADN.
d. De l'ovogonie est 2n = 46 chromosomes.

Exercice 4

Document 2 : *Variation de la quantité d'ADN par cellule au cours du temps*



Analyse de la courbe :

a. Il est impossible d'observer une telle courbe, au cours de la vie d'une cellule eucaryote.

b. Cette courbe s'observe lors d'une fécondation.

c. La chute après A est due à l'expulsion du deuxième globule polaire.

d. La chute après A est due à l'anaphase II de l'ovocyte.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

CORRIGÉS

Exercice 1

Bonne réponse : a.

b. et c. Faux. Il y a ici (avant séparation des chromatides) 6 chromosomes donc il s'agit d'une cellule à 2n = 3 ou n = 6 (il est impossible ici de savoir si les chromosomes sont homologues deux à deux). Dans une formule de caryotype de type 2n = 6, le chiffre 6 représente le nombre total de chromosomes dans la cellule et 2n indique que la cellule est diploïde et possède donc des paires de chromosomes homologues deux à deux. Il y a donc dans la cellule n = 3 types de chromosomes différents. n et 2n représentent la ploïdie d'une cellule respectivement haploïde et diploïde.

d. Faux. Certains microtubules sont liés entre eux et non aux chromosomes pour pouvoir séparer les deux lots de chromosomes.

Exercice 2

Bonne réponse : c.

Les humains possèdent des cellules somatiques (c'est-à-dire non reproductrices) à 2n = 46 chromosomes. Nous possédons donc 23 paires de chromosomes.

Exercice 3

Bonnes réponses : a., b. et d.

b. Vrai. Les 23 chromosomes du premier globule polaire sont bichromatidiens : ils sont le résultat de la méiose réductionnelle.

d. Vrai. Après le début de l'anaphase II de méiose, mais avant l'expulsion du deuxième globule polaire, l'ovocyte fécondé possède deux lots de 23 chromosomes nouvellement formés lors de l'anaphase II + 23 chromosomes apportés par le noyau du spermatozoïde.

Exercice 4

Bonnes réponses : b. et c.

b. Vrai. A correspond à la fécondation (entrée du noyau du spermatozoïde dans l'ovocyte) alors que B correspond à l'étape de réplication de l'ADN de chaque chromosome nécessaire avant l'étape C qui représente la première mitose de la cellule œuf.

c. Vrai. La cellule fécondée perd, lors de la chute de la courbe A, un tiers de la quantité d'ADN totale dans la cellule lors de l'expulsion du deuxième globule polaire.

d. Faux. Il s'agit de la cytodiérèse (en considérant que la quantité d'ADN en ordonnée est une quantité d'ADN par cellule et non par lot de chromosome).

Chapitre 2 ÉVOLUTION DES ÊTRES VIVANTS ET ÉVOLUTION DE LA BIODIVERSITÉ

Jefaislepointsurmesconnaissances

La diversification des êtres vivants permet l'évolution des populations d'individus au sein d'une même espèce, elle permet donc l'évolution des espèces et les mécanismes de spéciation.
Cette diversification peut s'effectuer **avec modification du génome** :

❖ Les mutations aléatoires de gènes lors de la réplication de l'ADN assurent le polymorphisme allélique des gènes.

❖ Les brassages méiotiques assurent une grande variété d'assortiments possibles d'allèles dans les gamètes qui participent à une fécondation. La fécondation amplifie le nombre de génotypes possibles dans une espèce. Des mécanismes de duplication génique permettent l'apparition de nouveaux gènes à l'origine de nouvelles espèces.

❖ Les mécanismes de polyploïdisation augmentent le nombre de chromosomes lors d'anomalies de méiose ou de mitose.

❖ Des transferts horizontaux de gènes entre espèces différentes sont également possibles entre différentes espèces.

La diversification des êtres vivants peut aussi avoir lieu **sans modification du génome** :

❖ Des variations dans la chronologie et l'intensité d'expression des gènes du développement diversifient durablement des individus.

❖ Des associations entre organismes comme la symbiose (association à bénéfices réciproques entre deux espèces) permettent de diversifier des individus.

❖ Des mécanismes de transmission culturelle permettent une transmission de comportements de génération en génération par voie non génétique.

Les populations d'individus se modifient au cours du temps sous l'action de la sélection naturelle et de la dérive génétique. Les modifications des populations au cours du temps constituent l'évolution biologique. Deux éléments contribuent à l'apparition d'une nouvelle espèce (c'est la « spéciation ») : l'isolement génétique et l'isolement reproducteur.
Les phénotypes et l'interfécondité sont à la base de la définition d'une espèce. Celle-ci apparaît quand une nouvelle population s'individualise (par isolement géographique ou comportemental) et elle disparaît quand sa population disparaît ou quand elle n'est plus isolée génétiquement.

Je sais définir

❖ Polyploïdisation, hybridation, transfert horizontal de gène, gène de développement, symbiose.

❖ Biodiversité, évolution, population, sélection naturelle, dérive génétique.

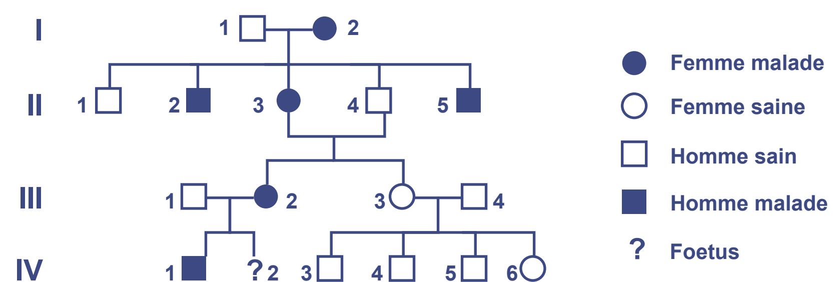
❖ Espèce, interfécondité, spéciation.

Je sais maîtriser

❖ Les arbres phylogénétiques, les comparaisons de matrices de différences génétiques.

ENTRAÎNEMENTS

Document 3 : *Arbre généalogique d'une famille touchée par une maladie génétique héréditaire.*



Exercice 1

D'après le document 3 :

a. L'hypothèse la plus probable est que la maladie soit autosomique récessive.
b. L'hypothèse la plus probable est que la maladie soit autosomique dominante.
c. Selon l'hypothèse la plus probable, l'homme I1 est hétérozygote.
d. Selon l'hypothèse la plus probable, les hommes II1 et III4 ont le même génotype.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 2

D'après le document 3 :

a. La fratrie IV3 à IV6 est forcément homozygote selon l'hypothèse la plus probable du mode de transmission de la maladie.
b. Selon l'hypothèse la moins probable, l'allèle muté est fréquent dans la population.
c. Selon l'hypothèse la moins probable, l'allèle muté n'est pas fréquent dans la population.
d. L'individu IV2 a une probabilité plus grande d'être homozygote qu'hétérozygote pour l'allèle sain.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 3

D'après le document 3 :

a. L'individu III3 peut être porteur sain de l'allèle muté de la maladie.
b. La maladie peut être à transmission gonosomique.
c. La maladie génétique étudiée semble être monogénique.
d. La fratrie IV3 à IV6 peut transmettre la maladie.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐



CORRIGÉS

Exercice 1

Réponses correctes : b. et d.

a. Faux. Chaque personne malade possède systématiquement un parent malade. Il est très peu probable (mais théoriquement possible) que la maladie soit à transmission récessive.

b. Vrai. Les garçons sont statistiquement autant concernés par la maladie que les femmes. La maladie est donc très probablement **autosomique**. Chaque personne malade ayant un parent malade, la maladie est donc très probablement **dominante**.

c. Faux. Selon l'hypothèse la plus probable, l'homme I1 est **homozygote sain pour le gène étudié**.

d. Vrai. Selon l'hypothèse la plus probable, II1 et III4 sont deux personnes **homozygotes saines** pour le gène étudié.

Exercice 2

Réponses correctes : a.

a. Vrai. Selon l'hypothèse la plus probable, la maladie est autosomique dominante. Chaque personne saine est alors obligatoirement **homozygote saine.**

b. et c. Faux. Les maladies dominantes sont rares dans la population et elles sont généralement létales à l'état homozygote.

d. Faux. L'individu IV2 a la même probabilité d'être homozygote (50 %) qu'hétérozygote (50 %).

Exercice 3

Réponses correctes : b. et c.

a. Faux. Il est impossible que l'individu III3 soit porteur de la version malade du gène étudié. Si c'était le cas, il serait obligatoirement malade dans l'hypothèse la plus probable.

b. Vrai. Une mère malade peut transmettre l'allèle responsable de la maladie à ses filles ou à ses fils. Le gène responsable de la maladie peut donc être autosomique ou gonosomique.

c. Vrai. Une maladie dont l'apparition dépendrait de plusieurs gènes n'apparaîtrait pas à chaque génération. Certaines générations seraient épargnées alors que leurs descendants pourraient parfois être malades.

d. Faux. Selon l'hypothèse la plus probable, la maladie est autosomique dominante. La fratrie IV3 à IV6 ne peut donc pas posséder l'allèle malade qui rendrait chaque individu porteur obligatoirement malade.

Chapitre 3

LA VIE FIXÉE DES PLANTES

Jefaislepointsurmesconnaissances

- ❖ Les plantes à fleurs (les « angiospermes » qui libèrent une graine entourée d'une couche protectrice) appartiennent au règne des végétaux.
- ❖ Un végétal est un organisme vivant non animal, généralement chlorophyllien, immobile, composé d'organes, capable de se nourrir et de se reproduire de différentes façons.
- ❖ La plante à l'état végétatif est composée typiquement de racines, de tiges et de feuilles pour assurer les fonctions de nutrition.
- ❖ Les tiges, les feuilles et les racines sont constituées de plusieurs types de tissus dont quatre types principaux : les tissus de soutien (sclérenchyme et collenchyme), les tissus de revêtement (épiderme et rhizoderme), les tissus conducteurs de sève (xylème pour la sève brute et phloème pour la sève élaborée), les tissus possédant une activité métabolique importante (les parenchymes).
- ❖ L'embryon d'une angiosperme (plante à fleurs) contient déjà les ébauches des futurs tissus indifférenciés producteurs de tissus spécialisés : les méristèmes caulinaires (de la tige) et racinaires. Ce sont ces méristèmes primaires qui sont à l'origine des différents tissus de la plante, ou méristèmes secondaires, qui apparaissent ultérieurement.
- ❖ Les branches et les rameaux sont également des tiges : ce sont des ramifications. Les troncs sont durs et rigides : c'est la tige principale du végétal.
- ❖ Une feuille comporte un pétiole intermédiaire entre la tige et le limbe. La feuille possède une croissance définie dans le temps : sa durée de vie est limitée.
- ❖ La racine est un axe qui croît vers le bas (géotropisme positif) et qui fuit la lumière (phototropisme négatif). La racine ne comporte ni feuille, ni bourgeon ni substance chlorophyllienne. Les jeunes racines possèdent des poils absorbants à leurs extrémités pour assurer la fixation de la plante au sol.
- ❖ Les méristèmes sont des tissus indifférenciés qui assurent la production d'organes nouveaux : feuilles, racines et fleurs. Les deux principaux assurant la croissance de la plante sont les méristèmes apicaux composés des méristèmes caulinaires et racinaires.
- ❖ Le xylème est constitué de vaisseaux formés d'une longue suite continue de cellules mortes et rigides où circule la sève brute. Le phloème est constitué de longues cellules de 15 µm à 60 µm de diamètre formant les tubes où circule la sève élaborée beaucoup plus concentrée en ions et molécules que la sève brute.

Je sais définir

- ❖ État végétatif, méristème, phloème, xylème, sèves brute et élaborée.
- ❖ Pollinisation, fleur, pistil, étamine, pollen, fruit, graine.
- ❖ Entomogamie, anémogamie, zoochorie, coévolution, collaboration.

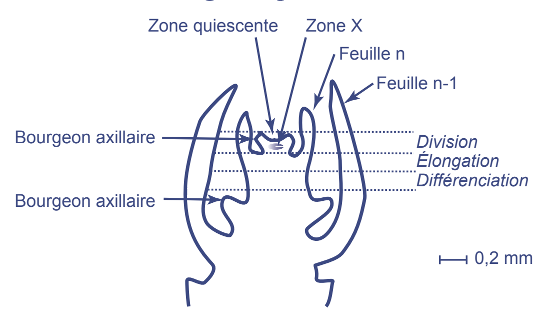
Je sais maîtriser

- ❖ La mise en évidence d'une collaboration entre un animal (insecte ou autre) et une plante pour assurer la pollinisation, l'adaptation d'une plante à son mode de vie fixé.

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1

Document 4 : *structure d'un bourgeon apical.*



Les cellules dans un méristème d'un bourgeon apical :

a. Sont toutes simultanément en mitose dans la zone X du document 4.
b. Sont de grande taille avec un petit noyau.
c. Sont de petite taille avec un gros noyau.
d. Possèdent beaucoup de petites vacuoles.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

BIOLOGIE

Exercice 2

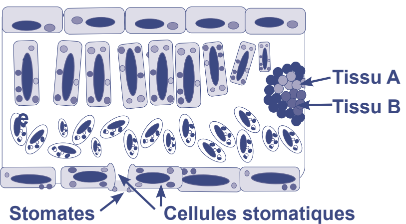
La croissance végétale par élongation :

a. Est permise par la pression de turgescence s'exerçant sur les jeunes parois.
b. Est contrôlée par une phytohormone.
c. Dépend de la pression de plasmolyse s'exerçant sur la paroi plastique.
d. Dépend de la synthèse de nouvelles chaînes glucidiques intégrées à la paroi.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 3

Document 5 : *Structure schématique d'une feuille en coupe transversale.*



D'après le document 5 et vos connaissances, à propos de la morphogenèse végétale.

a. La tige se développe à partir d'un méristème apical.
b. Les tissus A et B transportent de la sève élaborée et de la sève brute.
c. Les feuilles sont responsables du port du végétal.
d. Le fonctionnement des bourgeons est basé sur le fait que ces derniers sont constitués d'unités morphologiques répétitives.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

CORRIGÉS

Exercice 1

Réponses correctes : c. et d.

c. et d. Vrai. Les cellules méristématiques sont petites, isodiamétriques, sphériques et de grande taille avec beaucoup de petites vacuoles et aucun plaste différencié.

Exercice 2

Réponses correctes : a., b. et d.

a. et b. Vrai. C'est l'auxine qui est responsable de l'augmentation de la pression vacuolaire qui est le véritable moteur de l'extension cellulaire.

c. Faux. La « pression de plasmolyse » n'existe pas. La pression hydrostatique qui s'exerce sur la paroi de la vacuole (le tonoplaste) est la pression de turgescence.

Exercice 3

Réponses correctes : a., b., c. et d.

a Vrai. Les deux principaux méristèmes sont le méristème apical permettant **la croissance de la tige** et le méristème racinaire permettant **la croissance de la racine.**

b. Vrai. Les tissus A et B du document sont les tissus du xylème (transport de la sève brute) et du phloème (transport de la sève élaborée).

c. Vrai. La mise en place des feuilles (qui dépend aussi de facteurs environnementaux comme la lumière) détermine le port du végétal, c'est-à-dire sa **morphologie**.

d. Vrai. Les bourgeons sont constitués de feuilles imbriquées les unes dans les autres qui sont à la base de leur fonctionnement.

Chapitre 4

LA PLANTE DOMESTIQUÉE

Jefaislepointsurmesconnaissances

- ❖ Les espèces cultivées actuellement sont issues de modifications progressives d'espèces initialement sauvages. La domestication de ces espèces a débuté il y a environ 10 000 ans.
- ❖ Les espèces cultivées se distinguent des espèces sauvages par différentes caractéristiques : facilité de culture, de récolte et variété des utilisations possibles par l'Homme. Ces caractéristiques avantageuses pour l'Homme sont rédhibitoires dans le milieu sauvage : la sélection progressive des plants et des graines au cours du temps a rendu ces plantes inadaptées au milieu naturel.
- ❖ Après la domestication des plantes, la sélection artificielle a été effectuée d'abord par sélection variétale des plants (sélection des phénotypes donc des génotypes les plus adaptés à la culture humaine) : la transmission héréditaire de certains allèles a été utilisée par l'Homme pour sélectionner uniquement les plants les plus résistants, les plus rigides ou les plus chargés en amidon (cas du blé).
- ❖ Le maïs a ainsi été domestiqué en un lieu unique : le Mexique. Les régions américaines les plus proches du premier lieu de domestication ont été les premières à produire de nouvelles variétés, adaptées aux différentes conditions climatiques sur le continent américain.
- ❖ Le chou a en revanche été domestiqué dans plusieurs lieux indépendants et sa sélection a été focalisée sur différentes caractéristiques spécifiques aux lieux de domestication : teneur en vitamine C, taille de différents organes du chou ou capacité à se développer dans des conditions spécifiques.
- ❖ Ensuite, le génie génétique a permis d'apporter de nouveaux caractères à des plantes en introduisant dans son génome des gènes provenant d'une autre espèce : c'est la transgénèse qui permet de produire des organismes génétiquement modifiés (OGM).
- ❖ Selon le transgène utilisé, le rapport bénéfice/risque est variable en raison de la capacité naturelle des végétaux de s'hybrider entre eux. Il existe donc un risque de diffusion d'un nouveau gène (potentiellement néfaste pour l'espèce ou pour toute la chaîne alimentaire) amenant à la disparition progressive de l'espèce sauvage.

Je sais définir

- ❖ Sélection variétale, domestication, sélection phénotypique, allèle, biodiversité, transgène, OGM.
- ❖ Génie génétique, technique de croisement.

Je sais maîtriser



- ❖ La comparaison d'une plante sauvage et de sa variété cultivée.
- ❖ Les différentes étapes de production d'un OGM ainsi que la pertinence de l'utilisation d'un OGM donné (avantages et inconvénients potentiels).

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1

Les variétés de tournesol qui sont cultivées en France permettent de produire une quantité importante d'huile alimentaire à partir de ses graines. Le tournesol a été introduit à partir de l'Amérique du Nord où se trouvent les tournesols sauvages.

Tableau 1 : *Comparaison des phénotypes du tournesol cultivé et du tournesol sauvage.*

Caractère	Tournesol cultivé	Tournesol sauvage
Taille moyenne des feuilles	300 à 315 cm^2	180 à 270 cm^2
Nombre de ramifications par pied	0	12 à 16
Nombre d'inflorescences par pied	1	40 à 50
Poids des fruits	55 à 65 mg	9 à 10 mg
Nombre de fruits par pied	Environ 1 500	Environ 100

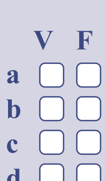
D'après l'analyse du tableau 1 et vos connaissances :

a. Le nombre de ramifications par pied du tournesol cultivé est favorable à la culture extensive.

b. La sélection phénotypique a progressivement sélectionné des pieds pourvus de petits fruits.

c. Les allèles sélectionnés ont permis de produire des rendements plus importants grâce au poids plus important des fruits obtenus après sélection.

d. La sélection par l'Homme ne présente au final que des avantages.



(Exercices 2 et 3)

Quand les agriculteurs choisissent une variété de maïs, ils doivent prendre en compte le nombre de jours et la température nécessaires au déclenchement de la floraison. Dans les régions tempérées par exemple, il faut que les pieds fleurissent rapidement, car la saison chaude est courte, contrairement aux régions tropicales.

Tableau 2 : *Étude de trois caractères phénotypiques pour quatre variétés de maïs cultivées.*

Numéro de la variété	Nom de la variété	Nombre de jours à 20 °C nécessaires pour fleurir	Nombre total moyen de feuilles	Surface foliaire maximale totale (en m^2)
1	LG11	40	15,00	0,406
2	A632xW117	45	18,75	0,657
3	B73xMo17	52	19,95	0,752
4	W64AxF546	48	18,67	0,685

Exercice 2

D'après le tableau 2, la variété 2 est :

a. Plus précoce que la variété 1.
b. Plus précoce que la variété 3.
c. La plus adaptée dans les régions où la saison chaude est courte.
d. La plus adaptée dans les régions les moins ensoleillées.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 3

D'après le tableau 2, les caractères phénotypiques sélectionnés :

a. Facilitent la culture grâce à la synchronisation de la date de floraison.
b. Augmentent la production photosynthétique journalière pour les variétés précoces.
c. Montrent une corrélation négative entre la précocité et la surface foliaire.
d. Illustrent le phénomène de domestication.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

CORRIGÉS

Exercice 1

Réponse correcte : c.

a. Faux. Plus le nombre de ramifications est élevé, meilleure sera la production.

b. Faux. La culture du tournesol a permis de sélectionner les tournesols produisant les fruits les plus nombreux et les plus gros, au détriment des autres caractéristiques.

c. Vrai. Le rendement correspond à la masse totale de fruits obtenus divisée par la surface cultivée correspondante (c'est-à-dire ramenée à une même surface ou à une même quantité de plants).

d. Faux. On peut observer dans le tableau que les inflorescences et les ramifications sont moins nombreuses chez le tournesol cultivé : le tournesol cultivé est donc beaucoup plus difficile à reproduire.

Exercice 2

Réponse correcte : b.

a. Faux. La variété 1 met seulement 40 jours à fleurir à 20 °C et non 45 jours.

b. Vrai. La variété 3 met 52 jours à fleurir à 20 °C et non 45 jours comme la variété 2.

c. Faux. C'est la variété 1, la plus précoce, qui est la plus adaptée à une saison chaude courte.

d. Faux. C'est la variété 3 qui possède le plus de feuilles et la surface de feuille la plus importante. Cela permet à la plante de capter le maximum de photons pour la meilleure photosynthèse possible.

Exercice 3

Réponse correcte : c.

a. Faux. La date de floraison dépend surtout de la date du semis et des conditions de culture. Les graines de la même espèce plantées simultanément lèveront en même temps.

b. Faux. C'est la densité de feuilles et la surface totale de feuilles qui déterminent la production photosynthétique (biomasse).

c. Vrai. La corrélation est négative : plus la précocité est importante (faible nombre de jours nécessaires pour fleurir) et plus la surface foliaire maximale totale est faible.

d. Faux. Le tableau illustre le phénomène de sélection artificielle.

Chapitre 5

LA RÉACTION INFLAMMATOIRE

Jefaislepointsurmesconnaissances

- **Grâce à la mise en œuvre d'un ensemble de phénomènes moléculaire, cellulaires et vasculaires, la réaction inflammatoire favorise la réponse immunitaire.**
- La **réaction inflammatoire** est un ensemble de mécanismes physiologiques de défense visant à circonscrire et à réparer les lésions tissulaires. Elle se caractérise par quatre phénomènes particuliers : la **douleur** (stimulation de neurones sensitifs), la **chaleur** (augmentation du métabolisme au foyer infectieux), la formation d'un **œdème** (« gonflement ») et la **rougeur** du site inflammé (provoqué par la vasodilatation des artérioles qui amènent plus de sang donc plus de cellules immunitaires).
- Elle est associée à une vasodilatation locale des vaisseaux sanguins et à une libération d'histamine (qui est aussi responsable des phénomènes allergiques).
- Les cellules responsables de l'inflammation sont les **macrophages** et les **granulocytes neutrophiles**. Plus tard, au cours de la réponse immune, des lymphocytes activés peuvent aussi participer à l'inflammation.
- Ces lésions peuvent être provoquées par différents pathogènes (bactéries, virus ou parasites), des traumatismes physiques ou chimiques, les corps étrangers exogènes ou des immuns complexes. Les lésions tissulaires initient une réponse immédiate grâce aux protéines plasmatiques responsables de la production de médiateurs pro-inflammatoires. Ces protéines sont à l'origine des modifications de la perméabilité vasculaire, de la migration de leucocytes au niveau du tissu et de leur activation.
- **Si les agents étrangers ou infectieux peuvent être éliminés**, de nouveaux médiateurs anti-inflammatoires sont produits, mettant fin à cette réaction inflammatoire et permettant la cicatrisation. **Dans le cas contraire** s'installe une inflammation chronique.
- Des molécules pharmaceutiques peuvent lutter contre la réaction inflammatoire : le but du traitement de l'inflammation est de réduire les effets indésirables (douleurs en particulier) de celle-ci, sans en modifier les conséquences réparatrices bénéfiques. On utilise aujourd'hui des **anti-inflammatoires** non stéroïdiens (l'aspirine ou le paracétamol) et les **corticoïdes**.

Je sais définir

- Réaction inflammatoire, œdème, prostaglandine, leucotriène, histamine, complément, margination, diapédèse, phase aigüe et phase chronique de la réaction inflammatoire, TNF, CRP.
- Anti-inflammatoire stéroïdien et non stéroïdien, cyclo-oxygénase (COX) et phospholipase (PL), antalgique.
- Allergie, vasodilatation, fièvre, antipyrétique.

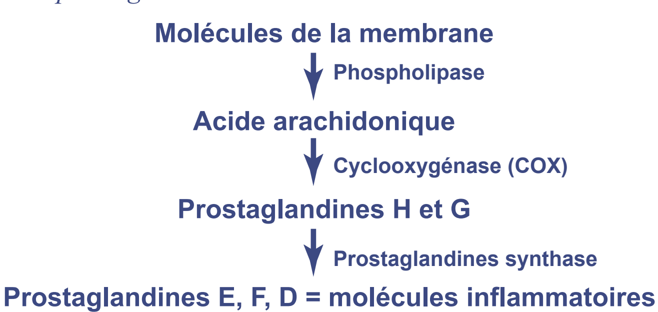
Je sais maîtriser

- Les grandes étapes de la réaction inflammatoire, de l'initiation jusqu'à sa mise en place finale.
- Les étapes de la réaction inflammatoire dans lesquelles interviennent des médiateurs solubles et cellulaires de l'inflammation.

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1

Document 6 : *Action des anti-inflammatoires non stéroïdiens. La chaîne de biosynthèse des prostaglandines.*



Parmi les molécules synthétisées lors de la réaction inflammatoire aiguë, certaines prostaglandines provoquent une vasodilatation et une augmentation de la perméabilité vasculaire, et contribuent ainsi à l'apparition des symptômes inflammatoires. Les étapes de la synthèse des prostaglandines à partir de molécules de la membrane d'une cellule sécrétrice sont représentées sur le document ci-dessus.

NB : chaque transformation chimique ne peut se produire spontanément, chacune dépend de l'activité d'une enzyme spécifique.

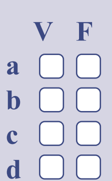
D'après le document 6 et vos connaissances, déterminez quelle est (ou quelles sont) la (ou les) proposition(s) suivante(s) :

a. La molécule de la membrane utilisée pour synthétiser une prostaglandine est un lipide.

b. La phospholipase est inhibée par des anti-inflammatoires non stéroïdiens.

c. La COX est stimulée par les anti-inflammatoires stéroïdiens.

d. Les prostaglandines, contrairement aux leucotriènes, inhibent la réaction inflammatoire.



Exercice 2

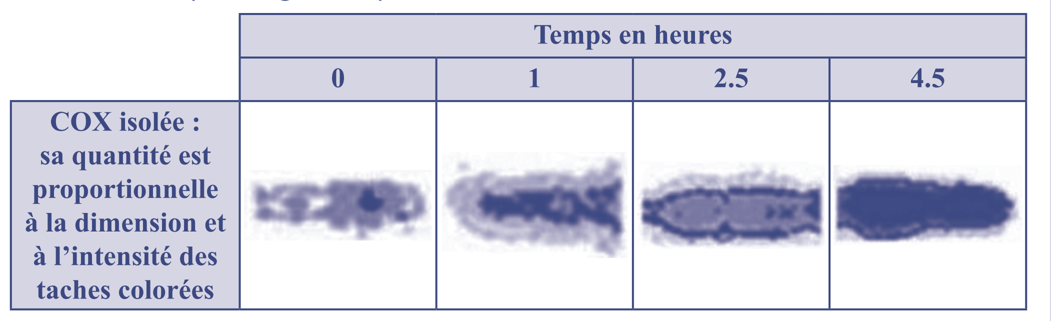
Des chercheurs travaillant sur la réaction inflammatoire se sont intéressés à l'enzyme cyclo-oxygénase (= COX).

On fait incuber un nombre défini de monocytes et de granulocytes en présence d'une concentration de 10 µg/mL de LPS (molécule de la paroi de nombreuses bactéries) pendant différents temps : 0, 1, 2,5 et 4,5 heures. On traite ensuite la culture de manière à récupérer le cytoplasme des cellules, et on effectue une électrophorèse destinée à séparer les molécules de COX des autres protéines cytoplasmiques.

La coloration des protéines COX donne les résultats ci-après.

Séparation des enzymes COX du cytoplasme de granulocytes et de monocytes après action du LPS à 10 µg/ml pendant différentes durées.

Document 7 : *Les conditions de synthèse de la cyclo-oxygénase (COX) dans les monocytes ou granulocytes.*



	Temps en heures			
	0	1	2.5	4.5
COX isolée : sa quantité est proportionnelle à la dimension et à l'intensité des taches colorées				

D'après le document 7 et vos connaissances, identifiez les propositions correctes :

a. Les granulocytes sont, contrairement aux monocytes, des phagocytes.

b. Les monocytes n'ont aucun lien avec les macrophages et ils n'interviennent donc pas dans la réaction inflammatoire.

c. L'expérience montre que plus la durée de contact entre monocytes et granulocytes avec le LPS augmente, plus la réaction inflammatoire est importante.

d. On peut bloquer l'activité observée dans le tableau grâce à un anti-inflammatoire stéroïdien comme l'aspirine.

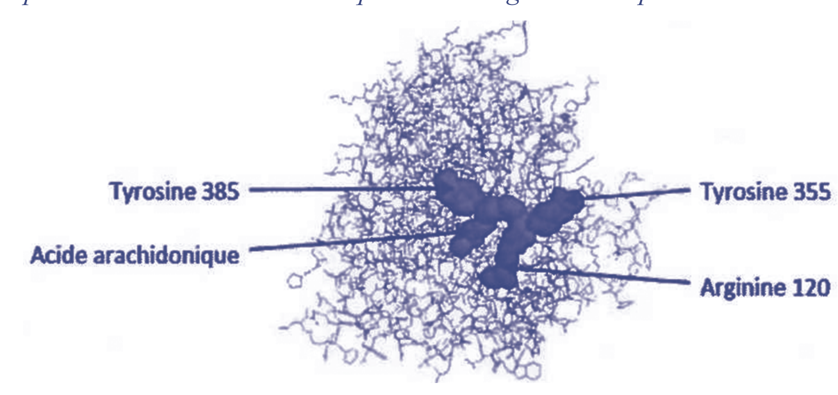
	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

BIOLOGIE

Exercice 3

La cyclo-oxygénase (COX) est une enzyme qui permet la formation de prostaglandines à partir de l'acide arachidonique.
Normalement, l'acide arachidonique, libéré des membranes, s'engage dans le site actif de la cyclo-oxygénase par un canal (une cavité dans la molécule) et établit une liaison avec un de ses acides aminés, la tyrosine en position 385. La transformation de l'acide arachidonique en prostaglandine commence alors. Le canal est délimité par les acides aminés tyrosine en position 355 et arginine en position 120.

Document 8 : *Le fonctionnement des cyclo-oxygénases. Visualisation du complexe Cox - Acide arachidonique avec le logiciel Rastop.*



D'après le document 8 et vos connaissances, identifiez les propositions correctes :

a. La cyclo-oxygénase est une enzyme de nature non protéique.

b. Le site actif de l'enzyme ne contient pas de tyrosine.

c. Le site actif de la cyclo-oxygénase n'est pas sensible aux variations de pH ou de température, comme pour la majorité des enzymes.

d. La COX est sensible à l'ibuprofène.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

CORRIGÉS

Exercice 1

Réponse correcte : a.

a. Vrai. La molécule de membrane utilisée est toujours un phospholipide.

b. Faux. Les anti-inflammatoires non stéroïdiens (**AINS**) inhibent uniquement la cyclo-oxygénase.

c. Faux. La COX est inhibée par les AINS**.**

d. Faux. Prostaglandines et leucotriènes **stimulent** les mécanismes de la réaction inflammatoire.

Exercice 2

Réponse correcte : c.

a. Faux. Les granulocytes et les monocytes sont tous deux des phagocytes.

b. Faux. Les monocytes sont à l'origine des macrophages après leur sortie du réseau vasculaire par margination et diapédèse.

c. Vrai. Plus la tache est importante, plus cela indique une grande quantité de COX ce qui traduit une réaction inflammatoire importante.

d. Faux. L'aspirine est une molécule non stéroïdienne : c'est un AINS.

Exercice 3

Réponse correcte : d.

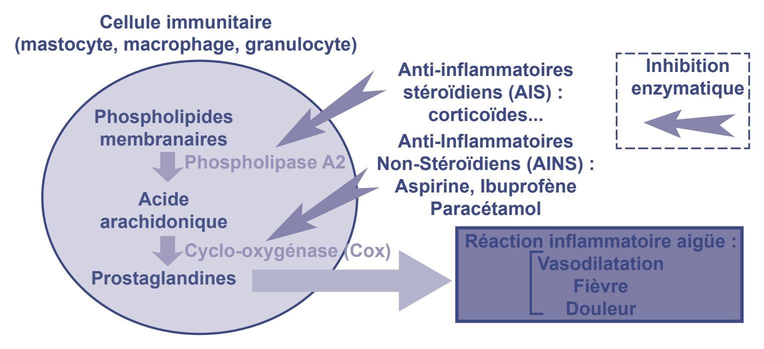
a. Faux. Toutes les enzymes sont de nature protéique.

b. Faux. Le site actif de l'enzyme est constitué en position 385 d'une tyrosine.

c. Faux. Comme toutes les protéines, les enzymes sont sensibles aux variations de pH et de température qui peuvent les inactiver ou pire, les dénaturer.

d. Vrai. La deuxième étape de synthèse des prostaglandines est catalysée par la COX qui est sensible aux anti-inflammatoires non stéroïdiens (AINS).

Document 9 : *Mode d'action des deux catégories d'anti-inflammatoires.*



BIOLOGIE

Chapitre 6

L'IMMUNITÉ ADAPTATIVE

Jefaislepointsurmesconnaissances

- ❖ L'immunité **acquise (ou « spécifique » ou « adaptative »)** correspond à des mécanismes (sécrétion d'anticorps, intervention des lymphocytes T ou LT) qui ne deviennent efficaces qu'après un premier contact avec l'antigène (ou **Ag**). Ce contact déclenche une réponse, toujours complexe, plus efficace et rapide que la première et elle s'accompagne d'une mise en mémoire de ce contact.
- ❖ La reconnaissance d'un agent infectieux comme étranger suppose que le système immunitaire reconnaisse certaines structures qui lui sont spécifiques et qui constituent le **soi** et différencie les structures qui ne lui appartiennent pas et qui constituent le **non-soi** ou le **soi modifié**. C'est le rôle des molécules du **complexe majeur d'histocompatibilité** ou **CMH** (ou HLA chez l'Homme, pour *Human Leucocyte Antigen*) qui comme son nom l'indique est la structure principalement responsable de la compatibilité tissulaire d'un greffon sur l'organisme greffé.
- ❖ Les acteurs de la RIS sont des Ac libres ou des lymphocytes : on parle donc de réponse immunitaire à médiation humorale (RIMH) ou à médiation cellulaire (RIMC).
- ❖ **Cette réaction est spécifique,** car elle est adaptée à chaque agent infectieux. Ici, chaque cellule ne peut reconnaître par ses récepteurs membranaires BCR (*B-Cell receptor* des LB c'est-à-dire les Ac membranaires) ou TCR (*T-Cell receptor* des LT) qu'un seul type de molécule anormale ou étrangère.
- ❖ Elle nécessite une **reconnaissance préalable** de l'agresseur pour être efficace.
- ❖ Sa **première mise en œuvre est retardée** : c'est la phase de latence de la **réaction « primaire ».**
- ❖ Ses modalités sont variées et font appel à deux catégories de cellules qui définissent les deux catégories d'immunité adaptative : les lymphocytes T et B.
- ❖ L'immunité adaptative se distingue de l'immunité non spécifique par sa faculté à conserver en mémoire le souvenir de la première agression : une agression ultérieure par le même agent infectieux entraînera une **réponse immunitaire plus rapide, plus affine et plus intense** (**réaction « anamnestique » ou « secondaire »**).
- ❖ Les **LT cytotoxiques** qui dérivent des LT8 activés assurent **l'immunité spécifique à médiation cellulaire**. Les LTc détruisent (cytolyse) ou stimulent l'apoptose de leur cellule cible.
- ❖ Les **anticorps libres** sécrétés par les plasmocytes qui dérivent des LB activés assurent **l'immunité spécifique à médiation humorale**. Les IG sécrétés agissent en neutralisant leur antigène spécifique.

Je sais définir

- ❖ Lymphocytes B et T, plasmocyte, anticorps ou immunoglobuline, paratope, CMH, antigène, complément, phénotype immunitaire, opsonisation.
- ❖ Restriction au CMH, sélection négative, commutation de classe, immunocompétence.
- ❖ BCR, TCR, CPA classique et CPA professionnelles.

Je sais maîtriser

- ❖ Les différentes étapes **d'activation**, **prolifération** et **différenciation** des lymphocytes B et T lors des réactions immunitaires spécifiques à médiation humorale et à médiation cellulaire.

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1

On cherche à déterminer les lymphocytes hôtes de l'EBV en étudiant son activité. Les résultats sont décrits dans le tableau ci-dessous.

Tableau : *Étude de l'activité du virus EBV dans différents types de lymphocytes*

Activité de l'EBV dans le lymphocyte	LT CD4	LT CD4 mémoire	LB	LB mémoire	LT CD8
État du virus	Inactif	Inactif	Actif	Latent	Inactif
Exposition de peptides viraux à la surface du lymphocyte	Non	Non	Oui	Occasionnellement	Non
Bourgeonnement	Non	Non	Oui	Occasionnellement	Non

D'après l'analyse du tableau ci-dessus, identifier la (ou les) réponse(s) correcte(s) :

a. L'EBV peut s'attaquer à toutes les catégories de lymphocytes.
b. Le bourgeonnement des virus indique que le virus sort définitivement des cellules cibles.
c. Seuls les lymphocytes B et les cellules qu'ils engendrent sont infectées par l'EBV.
d. On peut penser que l'EBV est un virus qui est capable de reconnaître le BCR d'un lymphocyte.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 2

On cherche à comprendre comment l'organisme lutte contre l'EBV.
Dans un premier temps, on réalise des expériences dont les résultats sont présentés dans le tableau ci-après.
Des lymphocytes (LB et LT) sont prélevés sur différents individus et sont ensuite transférés dans des boîtes de Pétri contenant un milieu de culture.

Document 10 : *Étude du mode d'action de l'EBV.*

Expériences	Protocoles	Résultats
1	LT provenant d'un individu infecté par l'EBV Milieu 1 : LB infectés par l'EBV	100% des LB lysés
2	LT provenant d'un individu infecté par l'EBV Milieu 2 : LB non infectés	Aucun LB lysé
3	LT provenant d'un individu infecté par l'EBV Milieu 3 : LB mémoires infectés par l'EBV	Aucun LB lysé
4	LT provenant d'un individu infecté par l'EBV Milieu 4 : LB infectés par un autre virus	Aucun LB lysé
5	LT provenant d'un individu non infecté par l'EBV Milieu 5 : LB infectés par l'EBV	Aucun LB lysé

D'après l'analyse du document ci-dessus, identifier la (ou les) réponse(s) correcte(s) :

a. Cette expérience montre la spécificité des lymphocytes par rapport à l'antigène présenté par la cellule infectée.

b. Cette expérience montre que des LT ne peuvent pas détruire des LB mémoires infectés par l'EBV, car l'EBV ne se développe pas assez dans le LB.

c. Des LB infectés par un virus A peuvent être détruits par des LT spécifiques d'un virus A.

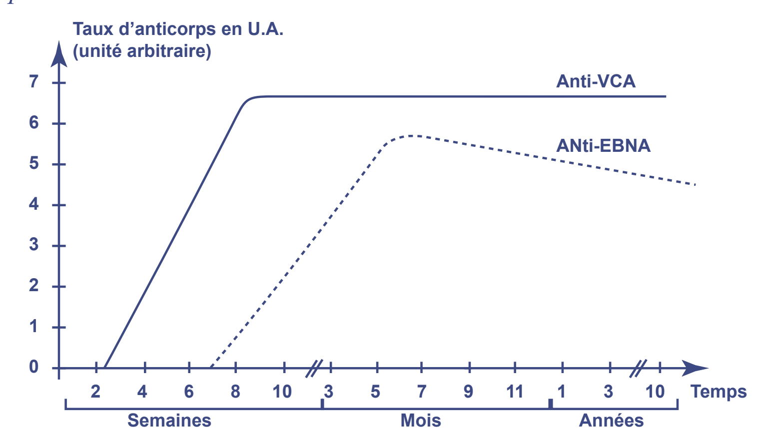
d. Cette expérience montre la double spécificité des LT : vis-à-vis de la cellule et vis-à-vis du virus à l'origine de l'infection de la cellule cible du LT.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 3

Dans un second temps, on pratique des analyses sérologiques régulières de patients infectés. Les résultats sont présentés dans le document ci-dessous.

Document 11 : *Variation du taux d'anticorps spécifiques de l'EBV en fonction du temps.*



On précise que VCA et EBNA sont des peptides de l'EBV.
D'après l'analyse du document ci-avant, identifiez la (ou les) réponse(s) correcte(s) :

a. Ce graphique montre que l'immunité mise en jeu est une immunité à médiation cellulaire.
b. Les cellules principales qui agissent dans la réponse immunitaire observée sont des lymphocytes T cytotoxique comme avec tous les virus.
c. Le graphique prouve que tous les antigènes, bien qu'antigéniques par définition, ne possèdent pas tous la même immunogénicité.
d. Si une vaccination devait être développée, il serait plus intéressant de vacciner un individu avec le VCA qu'avec l'EBNA.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 4

Les anticorps :
a. Sont toujours des protéines plasmatiques circulantes.
b. Sont fabriqués par les lymphocytes T.
c. Sont constitués par quatre chaînes polypeptidiques identiques deux à deux.
d. Présentent des régions hypervariables.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 5

Les lymphocytes T4 :
a. Sont les seules cellules cibles du VIH.
b. Sont les pivots des réactions immunitaires acquises.
c. Acquièrent leur maturité dans la moelle osseuse des os longs.
d. Présentent des récepteurs T spécialisés dans la reconnaissance d'antigènes.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

CORRIGÉS

Exercice 1

Réponses correctes : c. et d.

a. Faux. L'EBV ne lyse que les LB. Il ne peut donc reconnaître que ces cellules immunitaires.

b. Faux. Le bourgeonnement indique l'activité du virus dans la cellule où bourgeonne le virus. Le virus est en pleine phase de prolifération dans la cellule.

c. Vrai. Les LB et les LB mémoires contiennent des virus (latents dans les LB mémoires, mais présents).

d. Vrai. Un virus reconnaît toujours une molécule présente à la surface de sa cellule cible pour s'y fixer. On peut alors penser que l'EBV reconnait spécifiquement la protéine qui caractérise tous les LB : le récepteur de cellule B ou BCR.

Exercice 2

Réponses correctes : a. et b.

a. Vrai. Seules les cellules infectées par l'EBV (et uniquement l'EBV) sont détruites par les LT spécifiques.

b. Vrai. Le virus est présent à l'état latent dans les LB mémoires. L'absence (ou la trop faible présence) de marqueurs moléculaires du virus à la surface du LB mémoire empêche les LB d'être reconnus par des LT spécifiques.

c. Faux. Chaque LT est spécifique d'un peptide antigénique donné. C'est la **spécificité antigénique**. Les LT sont également spécifiques d'un CMH donné : pour pouvoir coopérer avec la cellule reconnue par le LT, celle-ci doit posséder le même CMH que celui du LT : c'est la **restriction des LT au CMH**.

d. Faux. Pour étudier la double spécificité des LT il aurait fallu dans l'expérience utiliser des LB infectés par l'EBV provenant d'un individu différent (CMH différent). On aurait alors observé une absence de lyse de la cellule qui est pourtant bien infectée. En effet, un LT cytotoxique ne peut lyser qu'une cellule qui possède le même assortiment de CMH à sa surface.

Exercice 3

Réponses correctes : c. et d.

a. Faux. C'est une immunité à médiation humorale, car elle met en jeu des immunoglobulines sécrétées par des plasmocytes.

b. Faux. C'est une réponse à médiation humorale donc les structures directement actives sur le virus sont des **anticorps** : c'est une **réponse immunitaire spécifique à médiation humorale**.

c. Vrai. Même si le système immunitaire réagit aux deux antigènes testés, les anticorps anti-VCA sont libérés plus vite et restent plus longtemps dans le sérum que les anticorps anti-EBNA.

d. Vrai. En raison de leur synthèse plus rapide et plus durable, les anticorps anti-VCA sont davantage protecteurs que les anticorps anti-EBNA.

Exercice 4

Réponses correctes : c. et d.

a. Faux. Les anticorps peuvent également être portés par des cellules : les LB. Ils sont alors membranaires et non circulants : on parle de récepteurs de cellules B ou BCR.

b. Faux. Ce sont les LB puis les plasmocytes dérivant des lymphocytes B activés par un antigène qui synthétisent les anticorps.

d. Vrai. Les anticorps possèdent sur leurs parties variables des chaînes légères et lourdes une région possédant une forte variabilité au sein de la même population d'anticorps spécifiques du même antigène. Ces régions sont nommées régions à haute variabilité ou HVR ou régions hypervariables. Elles forment la région de l'anticorps déterminant la complémentarité avec l'épitope de l'antigène (ou CDR).

Exercice 5

Réponse correcte : b.

a. Faux. Les macrophages et les monocytes sont également des cellules cibles.

b. Vrai. Les LT4 sécrètent des interleukines nécessaires aux réponses immunitaires spécifiques à médiations cellulaire et humorale.

c. Faux. Les LT4 comme tous les lymphocytes acquièrent leur maturité dans le thymus pendant l'enfance et l'adolescence puis dans les organes lymphoïdes secondaires pendant l'âge adulte (le thymus n'est plus présent à l'âge adulte).

d. Faux. Le récepteur T des cellules T ou TCR est caractérisé par une double spécificité : spécificité vis-à-vis du CMH de la cellule reconnue (restriction au CMH effectuée dans le thymus) et spécificité vis-à-vis du peptide antigénique présenté par le CMH de la cellule. Les récepteurs cellulaires spécialisés dans la reconnaissance d'antigène sont des anticorps membranaires de lymphocyte B ou BCR.

Chapitre 7 LE PHÉNOTYPE IMMUNITAIRE AU COURS DE LA VIE

Jefaislepointsurmesconnaissances

❖ Le phénotype immunitaire ou « répertoire immunitaire » correspond à l'ensemble des clones de lymphocytes B et lymphocytes T présents à un moment de la vie. Il correspond aussi à l'ensemble des différents BCR et TCR possédés par ces mêmes cellules. Le phénotype immunitaire résulte des stimulations antigéniques aléatoires et des vaccinations.

❖ Toute technique de vaccination permet de reproduire une situation naturelle, celle de l'immunité acquise contre un agent pathogène à la suite d'une première infection guérie. La vaccination est une mise en mémoire de la réaction immunitaire initiale provoquée de manière artificielle.

❖ La vaccination consiste à présenter au système immunitaire le virus, la bactérie, ou la toxine inactivée sous une forme immunogène (les microbes, ou ses antigènes, doivent déclencher une forte réaction immunitaire), et non pathogène.

❖ Fréquemment, le premier contact avec l'antigène présent dans le vaccin entraîne une réaction immunitaire lente et quantitativement peu importante. Cette réponse dite primaire doit alors être renforcée par un (ou des) rappel(s) qui entraîne(nt) une réaction immunitaire plus rapide, plus ample, plus intense, à l'origine d'une protection efficace plus durable : la réponse immunitaire secondaire.

❖ Cette protection repose sur le fait qu'en cas d'entrée ultérieure du pathogène dans l'organisme immunisé, les défenses immunitaires acquises sont rapidement opérationnelles.

❖ Lorsqu'une protection immédiate est nécessaire, une vaccination peut s'avérer trop lente pour être protectrice. Lors d'une blessure par un objet souillé on injecte simultanément un **vaccin** dans le cas où la date du dernier rappel antitétanique n'est pas connue et **un sérum antitétanique** composé d'anticorps antitoxine tétanique pour procurer une protection immédiate. On parle ainsi de **sérovaccination** puisqu'on associe une **vaccination** et une **sérothérapie**.

Des progrès récents ont permis de développer de nouveaux types de vaccins :

❖ Le vaccin développé contre le papillomavirus humain (HPV) protège contre l'infection de jeunes femmes par le HPV. La vaccination contre le virus HPV permet de protéger contre un cancer : le cancer du col de l'utérus.

❖ Il existe aujourd'hui des vaccins thérapeutiques qui permettent d'avoir une action curative (et non préventive comme les autres vaccins) en stimulant activement les défenses immunitaires, en particulier chez les sujets immunodéprimés (SIDA).

Je sais définir

❖ Phénotype immunitaire, BCR, TCR, antigène, anticorps, antigénicité, immunogénicité.

❖ Réponses immunitaires primaires et secondaires, sérothérapie, vaccination, sérovaccination.

❖ VIH, SIDA, primo-infection, séropositivité.

Je sais maîtriser

❖ Les différents types de vaccins ainsi que les types de réponses immunitaires après un vaccin.

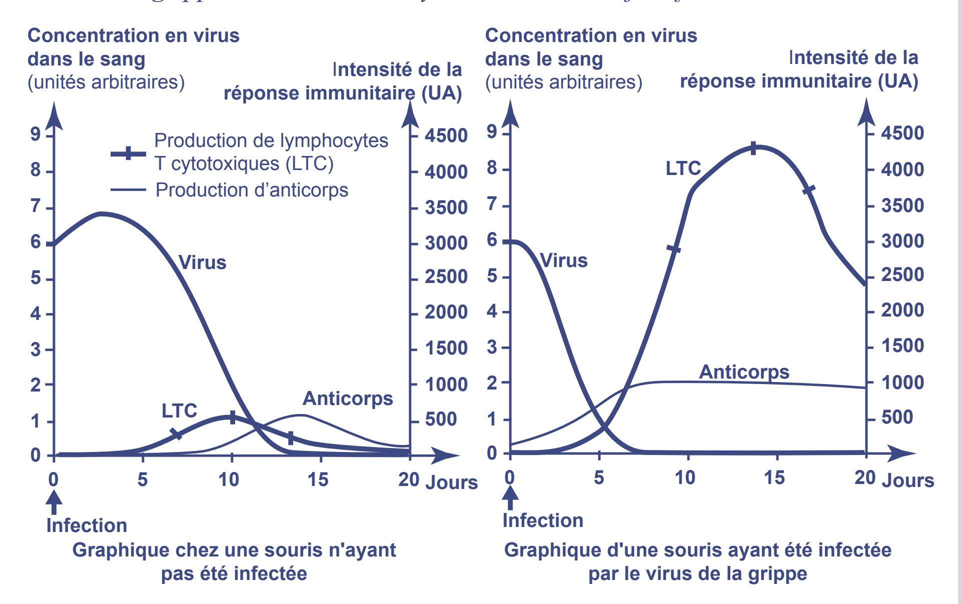
ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1

Document 12 : *Mais pourquoi se faire vacciner contre la grippe tous les ans ?*

Parce que la grippe n'est pas un simple virus, mais une famille de virus. Il existe plusieurs souches de virus connus et d'une année sur l'autre les souches provoquant la maladie varient. Par ailleurs, la grippe se modifie très rapidement, la vaccination mémorisée est donc peu efficace d'une année sur l'autre, d'où la nécessité de changer de vaccin tous les ans et le fait qu'on puisse se faire contaminer par la grippe malgré la vaccination.

Document 13 : *Comparaison de la réponse immunitaire adaptative contre le virus de la grippe chez des souris ayant ou non été déjà infectées.*



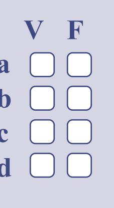
À partir de l'analyse des documents 12 et 13 et de vos connaissances, identifier la (ou les) proposition(s) correcte(s) :

a. Ce sont les mutations aléatoires qui expliquent les variations antigéniques des différentes souches de virus de la grippe d'une année sur l'autre.

b. La vaccination permet une protection immunitaire de durée équivalente à celle procurée par une infection naturelle par le virus de la grippe.

c. La réponse immunitaire observée sur le graphique de droite illustre la meilleure réponse immunitaire adaptative primaire obtenue après une première infection.

d. La réponse immunitaire adaptative secondaire est moins bonne sur le graphique de gauche que sur le graphique de droite.

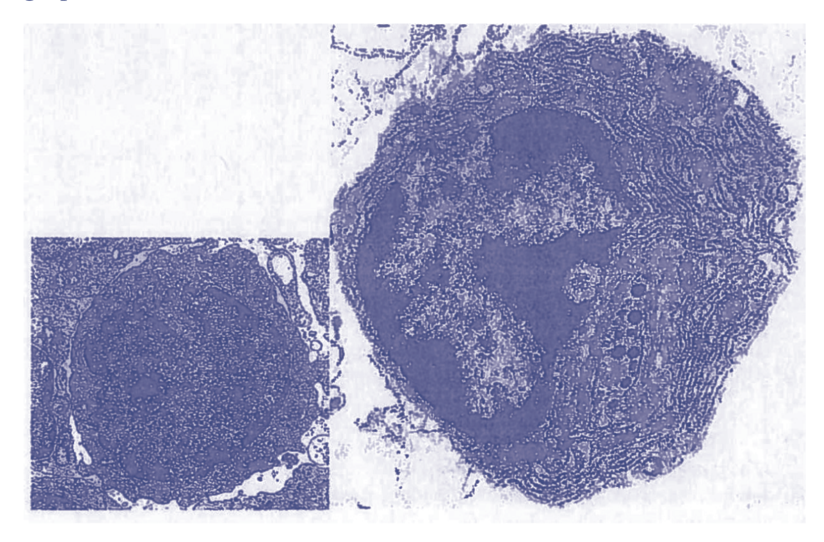


BIOLOGIE

Exercice 2

Chez un individu infecté par le bacille du tétanos, on observe une hypertrophie des ganglions lymphatiques. Un prélèvement dans un tel ganglion révèle la présence de deux types de cellules X et Y.
Chez un individu non infecté, un prélèvement dans un ganglion lymphatique ne révèle la présence que des cellules X. On sait également que les cellules Y dérivent des cellules X.

Document 14 : *Photographies de deux cellules prélevées dans les ganglions lymphatiques d'un individu infecté par le bacille du tétanos. Les deux photographies sont à la même échelle.*



Cellule X **Cellule Y**

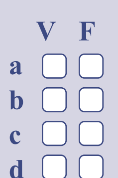
À partir de l'analyse du document 14 et de vos connaissances, identifier la (ou les) proposition(s) correcte(s) :

a. L'hypertrophie des ganglions lymphatiques peut forcément être corrélée à l'infection par *Clostridium tetanii*, agent causal de la tuberculose.

b. On peut penser que la cellule Y est un lymphocyte T car l'individu est infecté par une bactérie sécrétrice de toxines.

c. La cellule Y possède un important appareil sécrétoire cytoplasmique qui prouve qu'elle est à l'origine d'une forte sécrétion d'immunoglobulines spécifiques du bacille du tétanos.

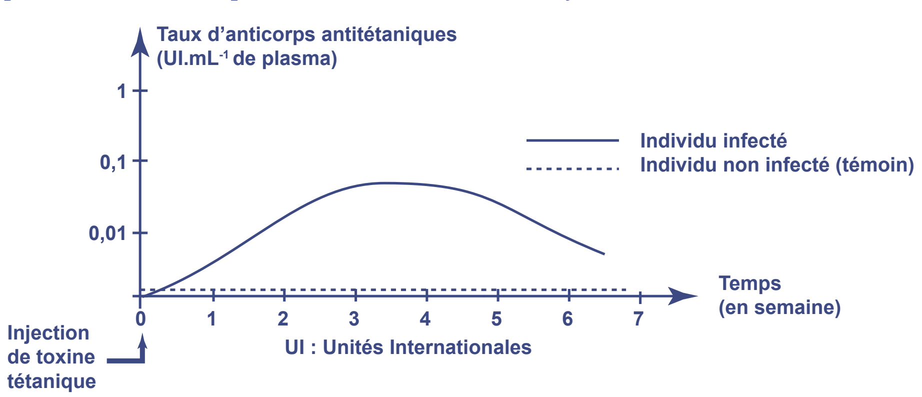
d. La cellule Y est un plasmocyte qui dérive d'un lymphocyte T4, la cellule X.



Exercice 3

Chez un individu subissant une injection de toxine tétanique, on observe une variation des taux d'anticorps spécifiques. Le document 15 compare cette variation des taux d'anticorps sériques au taux d'anticorps antitoxine tétanique chez un individu qui ne subit pas d'injection de toxine.

Document 15 : *Évolution du taux d'immunoglobulines chez un individu infecté par le bacille tétanique, et chez un individu non infecté.*



À partir de l'analyse du document 15 et de vos connaissances, identifier la (ou les) proposition(s) correcte(s) :

a. La courbe en pointillé montre qu'il n'existe aucun lymphocyte B antitoxine tétanique en absence d'injection de toxine.

b. La courbe correspondant à l'individu infecté montre que la toxine tétanique est immunogène, mais non pathogène.

c. Le document prouve que la réponse immunitaire à l'injection de toxine tétanique est une réponse immunitaire spécifique à médiation humorale.

d. Ce document montre l'intérêt d'une vaccination antitétanique.

	V	F
a	▢	▢
b	▢	▢
c	▢	▢
d	▢	▢

Exercice 4

Un épitope antigénique :

a. Est un marqueur membranaire du soi.

b. Est un élément susceptible d'être reconnu par l'ensemble des LT4 et des LB.

c. Peut être un fragment d'antigène présenté par une cellule phagocytaire.

d. Peut être une molécule se fixant sur chaque extrémité variable des immunoglobulines.

e. Peut être un fragment de protéine de la membrane du virus.

	V	F
a	▢	▢
b	▢	▢
c	▢	▢
d	▢	▢
e	▢	▢

CORRIGÉS

Exercice 1

Réponse correcte : a.

a. Vrai. Les mutations sont systématiques chez tous les êtres vivants et elles sont beaucoup plus fréquentes chez le virus de la grippe que chez les autres micro-organismes. Si une mutation importante a lieu entre deux saisons grippales, la protection (naturelle ou artificielle) ne sera plus efficace l'année suivante : la personne infectée par ce nouveau variant antigénique sera malade.

b. Faux. Une protection conférée par une vaccination antigrippale une année ne sera plus efficace l'année suivante pour être protégé correctement contre la maladie (la protection dure environ 7 mois). En revanche, une infection naturelle par le virus de la grippe procure une protection durable plusieurs années contre le même virus.

c. Faux. La réponse observée est une réponse immunitaire secondaire (la personne a déjà été infectée auparavant).

d. Faux. La première réponse immunitaire observée chez une souris n'ayant jamais été infectée est une réponse immunitaire primaire et non secondaire.

Exercice 2

Réponse correcte : c.

a. Faux. *Clostridium tetani* est l'agent causal du tétanos et non de la tuberculose.

b. Faux. La réponse immunitaire spécifique des toxines est toujours une réponse immunitaire à médiation humorale qui fait intervenir, par définition, des lymphocytes B.

c. Vrai. La cellule Y est un plasmocyte, cellule hyperspécialisée dans la sécrétion d'immunoglobulines libres (Ig G, Ig M, Ig A, Ig D ou Ig E).

d. Faux. La cellule Y est un plasmocyte qui dérive d'un lymphocyte B, cellule préexistante avant toute stimulation antigénique et qui est spécifique d'un antigène donné grâce à l'anticorps que le LB porte à sa surface.

Exercice 3

Réponses correctes : c. et d.

a. Faux. Les LB de l'organisme sont présents avant la naissance et sont synthétisés tout au long de la vie, avec ou sans stimulation antigénique. La synthèse des anticorps membranaires des LB est aléatoire et permet d'offrir à l'individu une protection permanente contre des dangers potentiels (antigènes) qui sont également de structures spatiales imprévisibles. Les LB sont donc toujours préexistants, avant toute stimulation antigénique.

b. Faux. Le document montre simplement que la toxine est immunogène (elle déclenche une réponse immunitaire spécifique). La toxine tétanique est une des substances toxiques naturelles les plus mortelles sur Terre.

c. Vrai. Le document montre la production d'anticorps spécifiques après une infection par le bacille du tétanos : il y a mise en place d'une **réponse immunitaire spécifique (ou « adaptative ») à médiation humorale**.

d. Vrai. On peut observer que l'individu qui subit l'injection de toxine tétanique synthétise lentement des anticorps spécifiques : le taux maximal est atteint après plus de trois semaines. Une vaccination permet de raccourcir ce délai en déclenchant immédiatement une réaction immunitaire de type secondaire, plus rapide, plus ample, plus intense et plus durable que la réponse primaire observée ici.

Exercice 4

Réponses correctes : c., d. et e.

a. Faux. Les marqueurs membranaires du soi sont les molécules du complexe majeur d'histocompatibilité ou CMH (ou « HLA »).

b. Faux. Les LT4 sont incapables de reconnaître un antigène (et donc un épitope antigénique) seuls : ils possèdent uniquement des TCR.

c. Vrai. Le complexe formé par le CMH II et le peptide antigénique présenté est reconnu par les lymphocytes T4 qui possèdent un TCR spécifique.

d. Vrai. Par définition, un épitope est une portion d'une molécule (nommée « antigène ») capable d'être reconnue par les paratopes (ou « déterminants antigéniques ») d'un anticorps spécifique de cet antigène.

Attention !

Il ne faut pas confondre antigénicité et immunogénicité.

Un antigène n'est pas obligatoirement une molécule étrangère. Par exemple, les « antigènes A » que possèdent les individus de groupe sanguin A ne sont pas immunogènes bien qu'ils soient antigéniques. L'antigénicité est donc une capacité que possède une molécule pour être reconnue par un anticorps.

L'immunogénicité est une capacité que possède un antigène pour déclencher une réponse immunitaire. Ainsi, tous les immunogènes sont des antigènes. L'inverse n'est pas vrai.

Chapitre 8

LE RÉFLEXE MYOTATIQUE

Jefaislepointsurmesconnaissances

❖ Les réflexes sont tous une réaction innée motrice involontaire, rapide et prévisible (on obtient toujours la même réponse à ce stimulus) en réponse à un stimulus.

❖ Les réflexes surviennent très rapidement dans des situations où une réflexion consciente prendrait trop de temps (protection par les mains lors d'une chute…).

❖ Le réflexe myotatique permet le maintien de la posture par les muscles squelettiques. Le réflexe myotatique est la contraction réflexe d'un muscle en réponse à son propre étirement. L'arc réflexe myotatique est composé uniquement de deux neurones : c'est un réflexe monosynaptique.

❖ En revanche, pour que le mouvement du membre soit possible, le réflexe myotatique est toujours couplé avec un réflexe antagoniste : le réflexe de relâchement du muscle antagoniste ou réflexe d'inhibition réciproque. Ce deuxième réflexe permet la relaxation du muscle qui s'oppose au mouvement en permettant de diminuer la fréquence des potentiels d'action qui parcourent la voie antagoniste. Ainsi, le muscle innervé par cette voie polysynaptique (présence d'un interneurone) se relâche (tonus musculaire plus faible), permettant le mouvement réflexe.

❖ L'arc réflexe est composé de différents éléments : un récepteur (fuseau neuromusculaire) qui recueille le stimulus, des fibres nerveuses sensitives qui transmettent le message reçu, un centre nerveux au niveau du système nerveux central (où la réponse est élaborée et déclenchée), des fibres nerveuses efférentes (motrices) qui transmettent les messages de contraction pour le muscle étiré (muscle sural) et de relâchement pour le muscle tibial qui est antagoniste et l'organe cible ou effecteur, qui effectue la réponse (contraction et relâchement pour l'antagoniste).

❖ Le réflexe de relâchement du muscle antagoniste participe, avec le réflexe myotatique, au maintien de la posture. C'est le relâchement d'un muscle en réponse à l'étirement du muscle antagoniste (celui qui s'oppose au mouvement engendré par la contraction du muscle qui est relâché en réponse). Ce réflexe met en jeu 3 neurones dont un interneurone soit deux synapses interneuronales. C'est donc un réflexe polysynaptique.

❖ Tous les neurones, qu'ils soient impliqués dans le relâchement d'un muscle (innervation réciproque) ou dans la contraction d'un muscle (voie efférente du réflexe myotatique), sont des neurones moteurs qui ne peuvent provoquer que des contractions lorsqu'ils sont stimulés.

Je sais définir

❖ Réflexe myotatique, réflexe de relâchement, message moteur ou efférent, message sensitif ou afférent, intégration neuronale, dépolarisation et hyperpolarisation.

❖ Innervation réciproque, motoneurone, fuseau neuromusculaire, unité motrice, plaque motrice.

❖ Maintien de la posture, réflexe inné et acquis, électromyogramme.

Je sais maîtriser

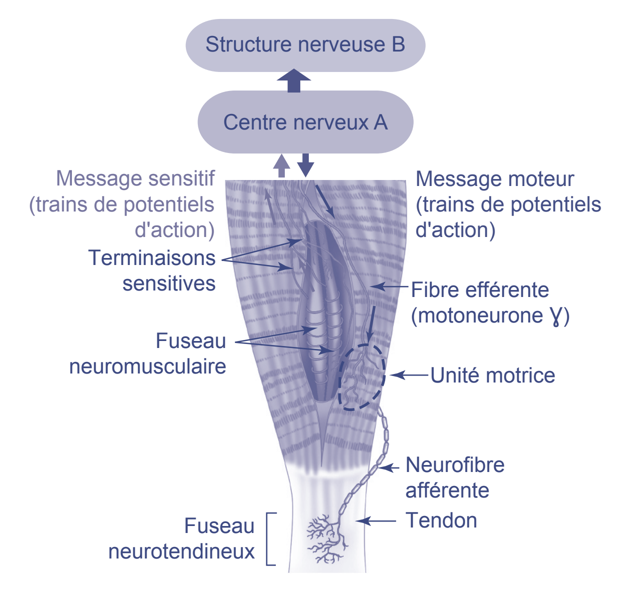
❖ Les mécanismes de codage d'une stimulation mécanique (étirement) en information électrique puis en une contraction (réflexe myotatique) ou en un relâchement (inhibition réciproque).

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1

Étude du fuseau neuromusculaire impliqué dans le réflexe myotatique

Document 16 : *Structure et liaisons nerveuses du fuseau neuromusculaire.*



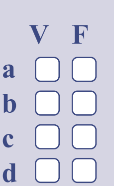
Concernant le réflexe rotulien :

a. Il est observé après percussion du tendon d'Achille.

b. Il nécessite obligatoirement l'intégrité totale de la liaison entre la structure nerveuse B et le centre nerveux A.

c. Le récepteur sensoriel mis en jeu est le fuseau neuromusculaire.

d. L'information motrice qui génère le mouvement emprunte la racine postérieure du nerf.

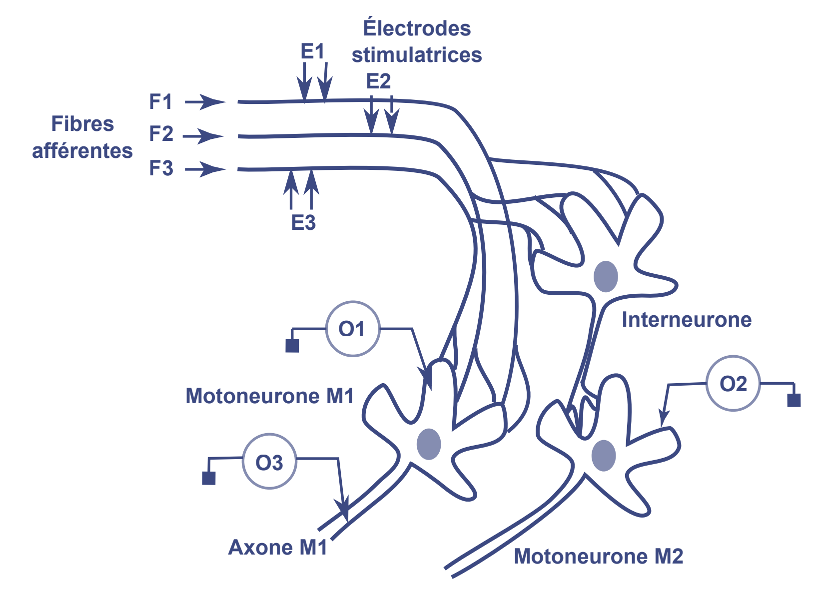


Exercice 2

Dans le but d'étudier le réflexe myotatique, on réalise un dispositif expérimental présenté dans le document 17 ci-après : une microélectrode est introduite dans un motoneurone M1 et une autre dans un motoneurone M2 de façon à enregistrer l'activité de ces neurones. Une troisième microélectrode permet d'enregistrer l'activité de l'axone issu du motoneurone Ml.

BIOLOGIE

Document 17 : *Réseau neuronal étudié et son dispositif expérimental.*



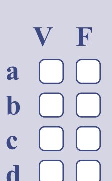
D'après le document 17 et à l'aide de vos connaissances, on peut dire que :

a. Le réflexe myotatique met en jeu des capteurs, les fuseaux neuromusculaires, cellules musculaires non contractiles reliées aux fibres afférentes F1, F2 et F3.

b. Le réflexe myotatique met en jeu des fibres musculaires contractiles, cellules effectrices du mouvement qui sont connectées uniquement à l'axone du motoneurone M1.

c. Si on stimule simultanément les fibres F1, F2 et F3, on reproduit artificiellement le résultat d'un étirement de fuseaux neuromusculaires : on obtient alors l'augmentation de la fréquence des potentiels d'action sur l'axone M1 et l'augmentation de la contraction de la fibre musculaire innervée par M1.

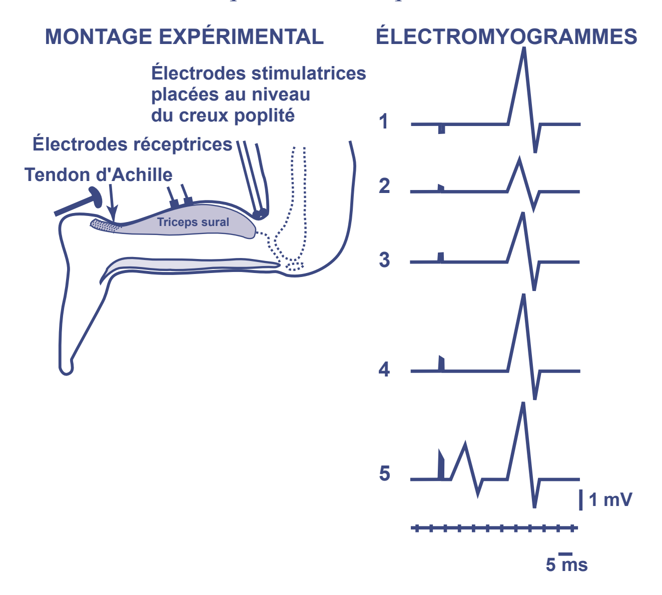
d. Suites à une stimulation simultanée des fibres afférentes F1, F2 et F3, on enregistrera le même évènement électrique sur les oscilloscopes O1, O2 et O3 : une dépolarisation.



Exercice 3

On place, sur le revêtement cutané du mollet, au-dessus du triceps sural, deux électrodes réceptrices connectées à un dispositif d'amplification et d'enregistrement de différences de potentiel. Elles permettent d'enregistrer les différences de potentiel qui traduisent l'activité électrique du triceps sural. Les tracés de l'électromyogramme sont reportés sur le document 18. Le tracé 1 correspond à une percussion du tendon d'Achille. Les tracés 2, 3, 4 et 5 correspondent à des stimulations électriques percutanées du nerf sciatique d'intensité croissante.

Document 18 : *Montage expérimental et électromyogrammes obtenus après différentes stimulations mécaniques ou électriques.*



D'après le document 18 et à l'aide de vos connaissances, on peut dire que :

a. L'électromyogramme est un enregistrement mécanique de l'activité électrique globale du muscle en réponse à sa stimulation.

b. On enregistre à chaque fois un potentiel d'action global musculaire dont l'amplitude et l'allure dépend du nombre de fibres musculaires stimulées par voie nerveuse.

c. L'enregistrement 5 montre l'apparition d'une deuxième onde électrique qui traduit l'existence d'un deuxième type de fibres nerveuses plus lentes pour conduire le message nerveux que celles impliquées dans les premiers enregistrements.

d. La réponse globale du muscle est toujours globalement proportionnelle à l'intensité de stimulation.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

BIOLOGIE

CORRIGÉS

Exercice 1

Réponse correcte : c.

a. Faux. Il est observé après percussion du tendon rotulien.

b. Faux. Le centre nerveux est la moelle épinière. Le centre nerveux B est le cortex cérébral. Or, le cerveau n'est pas nécessaire à ma mise en fonction du réflexe myotatique.

c. Vrai. Il est composé d'un ensemble de fibres musculaires gainées par un neurone sensitif.

d. Faux. L'information motrice emprunte la racine antérieure du nerf rachidien.

Exercice 2

Réponses correctes : a. et c.

a. Vrai. Les fuseaux neuromusculaires transforment l'énergie mécanique de l'étirement en énergie électrique (potentiels d'action).

b. Faux. Les fibres musculaires des membres sont à la fois connectées aux fibres sensitives et aux fibres motrices (par des synapses neuromusculaires).

c. Vrai. Le motoneurone est excité simultanément par les trois fibres sensitives excitatrices. Un potentiel postsynaptique excitateur apparaît dans le corps cellulaire de M1. Ce PPSE entraîne l'augmentation de la fréquence des potentiels d'action le long de M1.

d. Faux. L'électrode O2 est implantée dans le corps cellulaire d'un motoneurone qui subit l'apparition d'un potentiel postsynaptique inhibiteur (hyperpolarisation) alors que O1 enregistre une dépolarisation et O3 enregistre des potentiels d'action.

Exercice 3

Réponses correctes : b. et c.

a. Faux. C'est l'inverse : c'est l'enregistrement de l'activité électrique globale qui suit un évènement mécanique (contraction musculaire).

b. Vrai. Plus le nombre de fibres musculaires stimulées est grand, et plus l'enregistrement électrique obtenu est ample.

c. Vrai. Ce sont des fibres qui conduisent plus rapidement le message électrique d'excitation au muscle étudié : la stimulation électrique a alors atteint directement les fibres motrices du nerf qui innerve la jambe. Le message nerveux n'a donc pas besoin de passer par la moelle épinière. Il parcourt directement le trajet creux poplité-triceps sural par les fibres motrices.

d. Faux. À partir de la stimulation 4, on peut observer l'apparition d'une amplitude maximale malgré l'augmentation de l'intensité de stimulation en 5 : toutes les fibres nerveuses motrices sont stimulées et toutes les fibres musculaires du triceps sural sont alors contractées en réponse à la stimulation.

Chapitre 9

DE LA VOLONTÉ AU MOUVEMENT

Je fais le point sur mes connaissances

- ❖ Les neurones intervenant dans la motricité volontaire sont organisés de manière hiérarchisée.
- ❖ Pour entreprendre un mouvement, c'est le niveau le plus haut (l'encéphale) qui élabore l'action motrice grâce à la mémoire, aux émotions ou à la motivation. L'information nerveuse est ensuite relayée vers les structures de l'encéphale qui constituent le niveau moyen (tronc cérébral, cervelet…) et qui déterminent la posture et les mouvements individuels nécessaires à la réalisation du mouvement prévu. Les neurones du niveau moyen reçoivent des informations en provenance des récepteurs situés au niveau des muscles, des tendons, des articulations, de la peau ainsi que de l'appareil vestibulaire (dans l'oreille interne) et des yeux.
- ❖ L'information afférente indiquant la position du corps et de ses segments est nommée proprioception.
- ❖ L'information est alors transmise par voie descendante au niveau local qui comprend les interneurones et les motoneurones correspondants. Les voies descendantes vers le niveau local ne naissent que dans le cortex sensitomoteur et dans le tronc cérébral.
- ❖ La motricité volontaire est possible grâce à un faisceau de neurones nommés **faisceau pyramidal** issu du **cortex préfrontal** (partie du cortex cérébral constituée de corps cellulaires de **neurones pyramidaux**) ou **cortex moteur primaire**. Le faisceau de neurones traverse alors le tronc cérébral et le bulbe rachidien où de nombreux contacts synaptiques ont lieu. Ce faisceau se prolonge dans la moelle épinière où le contact synaptique avec les motoneurones a lieu au niveau de la corne antérieure de la moelle épinière.
- ❖ La plupart des influx synaptiques destinés aux motoneurones et provenant des voies descendantes et des neurones afférents ne gagnent pas directement les neurones moteurs, mais plutôt des **interneurones** avec lesquels ils font synapses.
- ❖ **Les interneurones constituent plus de 90 % des neurones de la moelle épinière**. Ces interneurones jouent un rôle important pour déterminer quels seront les muscles activés et quand ils le seront. De plus, les interneurones peuvent aussi jouer le rôle « d'interrupteurs » en déclenchant ou empêchant un mouvement. Les interneurones sont donc fondamentaux pour les réflexes médullaires et pour la motricité volontaire.

Je sais définir

- ❖ Motricité volontaire, réflexe, neurone cortical, noyaux gris centraux, tronc cérébral, décussation.
- ❖ Cortex préfrontal, cortex somatosensoriel ou cortex somesthésique, cortex sensitomoteur.
- ❖ Neurone pyramidal, interneurone, motoneurone, cellule gliale, cellule de Schwann.

Je sais maîtriser

- ❖ Le trajet de l'information sensorielle et de l'information nerveuse motrice volontaire (voies pyramidale et extrapyramidale).

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1

Maladie auto-immune et système nerveux

Jean est en consultation chez son médecin : il présente une fatigue musculaire chronique et a du mal à garder ses paupières relevées. Le médecin suspecte une maladie neuromusculaire chronique liée à un défaut de transmission entre le nerf et le muscle : la **myasthénie**.

Document 19 : *Résultats des différents examens effectués chez Jean.*

Des enregistrements de l'activité électrique du muscle (électromyogramme) lors de la stimulation électrique du nerf qui le commande montrent des potentiels globaux d'amplitude décroissante alors que chez un sujet non atteint ces potentiels ont tous la même amplitude.

Des enregistrements de l'activité électrique du nerf après stimulation de ce dernier montrent les mêmes réponses chez un sujet non atteint et chez Jean.

De même, une stimulation directe du muscle de Jean montre une activité électrique normale de ce muscle.

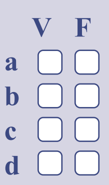
D'après vos connaissances et d'après l'analyse du texte ci-dessus, on peut dire que :

a. La stimulation électrique du nerf montre que celui-ci obéit à la loi du tout ou rien.

b. Les potentiels globaux enregistrés sont d'autant plus amples que les fibres musculaires recrutées pour la contraction sont nombreuses : l'électromyogramme de Jean est normal.

c. Les réponses observées consécutives à la stimulation directe du muscle étudié n'expliquent probablement pas la pathologie étudiée.

d. Les résultats de la stimulation du nerf impliqué dans le mouvement observé semblent expliquer la pathologie étudiée.



Exercice 2

Document 20 : *Résultats d'injections de curare radioactif au niveau de la plaque motrice.*

Le curare, une molécule extraite de certaines lianes d'Amazonie, possède la propriété de se fixer sur les récepteurs à l'acétylcholine, au niveau de la synapse neuromusculaire. Son injection à une souris saine entraîne des symptômes analogues à ceux de la myasthénie.

Expérience : Du curare radioactif est mis en présence de cellules musculaires prélevées chez un individu sain et chez un individu myasthénique. On rince ensuite les cellules, ce qui a pour effet d'éliminer toutes les molécules de curare qui ne sont pas fixées sur les cellules. Enfin, on réalise une autoradiographie de chaque type de cellules musculaires afin de révéler la radioactivité.

Résultats expérimentaux : On observe une forte radioactivité au niveau de la

plaque motrice du sujet sain alors qu'il y a peu de radioactivité au niveau de la plaque motrice du sujet myasthénique.
Finalement le médecin prescrit des analyses de sang à Jean.
Le document suivant indique les résultats de cette analyse :

Document 21 : *Analyse sanguine de Jean comparée à celle d'un sujet non atteint.*

	Sujet non atteint	Jean
Test de dépistage d'anticorps autoréactifs dirigés contre les récepteurs à l'acétylcholine	-	+++

Au vu des résultats, le médecin confirme son premier diagnostic et explique à Jean qu'il est atteint d'une maladie auto-immune qui affecte le fonctionnement de ses synapses neuromusculaires.
D'après vos connaissances et l'analyse du texte ci-dessus, on peut dire que :

a. Le document 20 prouve que le curare agit de manière compétitive avec l'acétylcholine.
b. Le document 20 établit que l'individu myasthénique est victime d'une anomalie de fixation du curare qui s'explique par un défaut au niveau du récepteur à l'acétylcholine.
c. Le document 21 confirme que la myasthénie s'explique par un défaut de structure de l'acétylcholine.
d. Le document 21 confirme le document 20 : Jean possède à la surface de ses muscles des récepteurs à l'acétylcholine qui sont bloqués par la présence d'anticorps auto-immuns.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 3

La sclérose en plaques (SEP) est une autre maladie auto-immune qui affecte le système nerveux.
Les cellules de Schwann, formant la gaine de myéline autour de certaines fibres nerveuses, sont lysées par des lymphocytes autoréactifs ce qui entraîne entre autres des problèmes de motricité.
On sait que les fibres nerveuses des motoneurones commandant la contraction musculaire sont de type alpha.

Document 22 : *Caractéristiques de certaines fibres nerveuses.*

Types de fibres nerveuses	Gaine de myéline	Diamètre (en µm)	Vitesse de conduction (en m/s)
Alpha	Myélinisée	13-20	80-120
Béta	Myélinisée	6-12	35-90
C	Non myélinisée	0,5-1,5	0,5-2

D’après vos connaissances et l’analyse du texte ci-avant, on peut affirmer que :

a. Plus le diamètre d’une fibre nerveuse est grand, plus la résistance au déplacement du message nerveux est faible.

b. La gaine de myéline augmente la vitesse du message nerveux sur les fibres nerveuses.

c. La destruction des cellules de Schwann chez l’individu atteint de SEP explique la plus faible vitesse de conduction du message nerveux le long des fibres nerveuses à l’origine des troubles observés.

d. La SEP est une maladie auto-immune caractérisée par la présence de lymphocytes B autoréactifs.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

CORRIGÉS

Exercice 1

Réponses correctes : c. et d.

a. Faux. Le nerf n'obéit pas à la loi du tout au rien : c'est l'axone (ou « fibre nerveuse ») qui la suit. La réponse d'un nerf augmente avec le nombre de fibres nerveuses stimulées.

b. Faux. Les potentiels globaux obtenus après stimulation du nerf moteur de Jean sont de moins en moins amples : le muscle se fatigue anormalement vite. L'électromyogramme de Jean est anormal.

c. Vrai. L'électromyogramme est normal alors que Jean souffre de myasthénie.

d. Vrai. La stimulation directe du nerf moteur montre une réponse anormale du muscle alors que les capacités conductrices du nerf sont normales et que les capacités contractiles du muscle sont également normales. Le problème vient donc probablement de l'interface nerf/muscle : la synapse neuromusculaire.

Exercice 2

Réponses correctes : a., b. et d.

a. Vrai. Le curare est un analogue structural de l'acétylcholine qui bloque les récepteurs à l'acétylcholine en s'y fixant à sa place.

b. Vrai. Le curare ne se fixe pas sur le récepteur à l'acétylcholine car, soit celui-ci possède une structure spatiale anormale, soit un élément anormal empêche la fixation du curare et de l'acétylcholine.

c. Faux. Si le curare ne peut se fixer correctement, l'acétylcholine ne le peut pas également.

d. Vrai. Le curare est bloqué, l'acétylcholine non plus ne peut plus se fixer au niveau de la plaque motrice musculaire (les deux molécules ont des structures analogues) : la contraction musculaire est impossible, caractéristique de la myasthénie.

Exercice 3

Réponses correctes : a., b. et c.

a. Vrai. La vitesse de conduction nerveuse augmente avec le diamètre de l'axone.

b. Vrai. La gaine de myéline permet au message nerveux de se déplacer par conduction saltatoire, plus rapide que la conduction de proche en proche en absence de myéline.

c. Vrai. Des LT autoréactifs présents chez les individus atteints de SEP détruisent la gaine de myéline à l'origine d'une meilleure conduction nerveuse.

d. Faux. Ce sont des lymphocytes T cytotoxiques autoréactifs qui détruisent la gaine de myéline par choc osmotique après action de la perforine.

Chapitre 10

LE CONTRÔLE DES FLUX DE GLUCOSE

Je fais le point sur mes connaissances

- Le contrôle de la glycémie est un mécanisme réflexe qui a lieu en permanence grâce à une boucle de régulation qui fait intervenir des **capteurs** également **centre intégrateur** (les cellules glucosensibles α et β des îlots pancréatiques de Langerhans) ainsi que des **effecteurs** (foie, muscles et tissu adipeux).
- Les cellules musculaires ont besoin de nutriments, principalement de glucose et de dioxygène, qui sont puisés en permanence dans le sang.
- Les réserves de glucose sont sous forme de glycogène situé majoritairement dans les cellules musculaires striées squelettiques, mais aussi dans les cellules hépatiques où il est le plus concentré. Le glycogène stocké dans le foie et les muscles permet d'assurer un flux de glucose permanent, qui varie selon l'activité. Le flux de glucose a lieu entre les organes sources (intestin et foie) et les organes consommateurs (cerveau, muscles…). L'utilisation de triglycérides permet d'épargner le glucose.
- La glycémie est la concentration de glucose dans le plasma sanguin, maintenue dans un intervalle relativement étroit autour d'une valeur d'équilibre proche de 1 $g.L^{-1}$. La glycémie dépend des apports alimentaires et de la consommation par les tissus consommateurs. La glycémie est principalement régulée par deux hormones sécrétées par le pancréas : l'**insuline** (seule hormone hypoglycémiante) ainsi que par le **glucagon** (une des hormones hyperglycémiantes : cortisol, adrénaline…).
- Un dysfonctionnement de la régulation de la glycémie est le diabète qui existe sous deux formes principales : le diabète de type I et le diabète de type II.
- Le diabète de type I apparaît tôt dans la vie et se traduit par une destruction auto-immune des cellules productrices d'insuline : les cellules β des îlots pancréatiques de Langerhans. Traitement : injection d'insuline.
- Le diabète de type II apparaît généralement chez l'adulte après une augmentation progressive de l'insulinorésistance des cellules insulinosensibles (foie, muscles et tissu adipeux) en raison d'une mauvaise hygiène de vie (sédentarité associée à une consommation fréquente ou excessive de denrées sucrées) et souvent une prédisposition génétique.

Je sais définir

- Homéostasie, glycémie, glycolyse, glycogénolyse, glycogénogenèse, néoglucogenèse, lipolyse et lipogenèse, récepteurs à insuline et à glucagon.
- Système de régulation, pancréas endocrine, hormones hyper et hypoglycémiantes.
- Diabète insulinodépendant (ou DID ou diabète maigre ou diabète juvénile ou diabète de type I) et non insulinodépendant (ou DNID ou diabète gras ou diabète de l'adulte ou diabète de type II).

Je sais maîtriser

- L'organisation du pancréas endocrine.
- Les mécanismes et éléments de régulation de la glycémie qui font intervenir trois principaux organes effecteurs : le foie, les muscles et le tissu adipeux.

ENTRAÎNEMENTS

Exercice 1

Le diabète de type I :

a. Est la forme la plus fréquente du diabète.
b. Apparaît chez des individus âgés de plus de quarante ans.
c. Est dû à une altération de la sécrétion d'insuline.
d. Est dû à une sécrétion d'insuline toujours inférieure aux besoins de l'organisme.
e. Est dû à une diminution de la reconnaissance du glucose comme signal de la sécrétion d'insuline.
f. Est dû à la destruction des cellules β du pancréas.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐
e	☐	☐
f	☐	☐

BIOLOGIE

Exercice 2

Une injection d'insuline provoque toujours :

a. Une hypoglycémie.
b. Une diminution de la glycémie.
c. Une diminution de la glycémie chez un sujet atteint d'un diabète de type I.
d. Une diminution de la glycémie chez un sujet atteint d'un diabète de type II.
e. Une hyperglycémie passagère.
f. Le stockage du glucose par le tissu adipeux.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐
e	☐	☐
f	☐	☐

Exercice 3

La régulation de la glycémie :

a. Présente un système réglé, le milieu intérieur.
b. Présente un système réglant, le pancréas, le foie, le tissu adipeux et les muscles.
c. Correspond à une boucle de rétroaction négative.
d. Permet le maintien de la glycémie à 1 $g.L^{-1}$.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 4

Les cellules α des îlots de Langerhans :

a. Sont localisées dans la partie centrale des îlots.
b. Synthétisent une hormone hypoglycémiante, le glucagon.
c. Sont les capteurs d'une hyperglycémie.
d. Fabriquent une hormone qui a pour cellule cible le foie exclusivement.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

Exercice 5

À propos de la régulation de la glycémie :

a. Le foie en est le principal effecteur.

b. Les muscles peuvent intervenir en cas d'hypoglycémie due à un effort physique.

c. Le tissu adipeux peut libérer du glucose en cas de besoin.

d. Le pancréas endocrine est directement sensible aux variations de la glycémie.

e. Plusieurs hormones peuvent entraîner une correction de l'hypoglycémie.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐
e	☐	☐

Exercice 6

Dans le cas d'une hyperglycémie provoquée, le test montrera qu'il n'y a pas de dysfonctionnement si :

a. L'insulinémie initiale est nulle.

b. La glycémie initiale est nulle.

c. L'insulinémie augmente en même temps que la glycémie, mais après un court délai.

d. La glycémie augmente à partir d'une valeur initiale de 1,26 g/L.

e. Insulinémie et glycémie décroissent avant la fin du test.

f. La glycémie tarde à diminuer malgré un taux élevé d'insuline.

	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐
e	☐	☐
f	☐	☐

CORRIGÉS

Exercice 1

Réponse correcte : f.

a. Faux. C'est le diabète de type II.

b. Faux. L'insuline n'est plus du tout sécrétée, car les cellules sécrétrices sont tuées par le propre système immunitaire de l'individu.

c. et d. Faux. Le diabète de type I (insulinodépendant) est dû à une absence de sécrétion d'insuline et pas à une simple diminution de sécrétion d'insuline.

e. Faux. C'est le cas du diabète de type II.

f. Vrai. Le diabète de type I est dû à une destruction des cellules β de l'organisme par les propres cellules immunitaires (lymphocytes T cytotoxiques) de l'organisme touché par cette maladie. On parle de réaction auto-immune.

Exercice 2

Réponses correctes : b., c. et e.

a. Faux. Même si l'insuline est toujours hypoglycémiante, son effet final dépend de la concentration finale (après injection) en insuline d'une part et de la glycémie initiale (avant injection) d'autre part.

b. Vrai. L'insuline est **la seule hormone hypoglycémiante de l'organisme**.

c. Vrai. Même si les cellules β du pancréas endocrine de l'individu atteint de diabète de type I sont détruites par la maladie auto-immune, les cellules de l'organisme sont néanmoins toujours sensibles à l'insuline.

d. Faux. L'insuline est hypoglycémiante.

e. Vrai. Le tissu adipeux est responsable de la synthèse de triglycérides à partir d'acides gras synthétisés par l'organisme en cas de surcharge énergétique (hyperglycémie) : c'est la **lipogenèse** qui est stimulée par l'insuline.

Exercice 3

Réponse correcte : b.

a. Faux. Le système réglé est la glycémie.

b. Vrai. Le centre permettant la mesure et la comparaison de la glycémie à la valeur de consigne est le pancréas. Les organes effecteurs sont le foie, les muscles et le tissu adipeux.

c. Faux. La glycémie est le paramètre réglé par l'insuline et le glucagon. En revanche, ces deux hormones n'exercent aucune inhibition en retour sur le pancréas. Ce sont les variations de la glycémie qui régulent en retour les sécrétions d'insuline et de glucagon.

d. Faux. La glycémie n'est jamais maintenue de manière stable à 1 g.L-1.

Exercice 4

Réponses correctes : a. et d.

a. Vrai. Les cellules α sont moins nombreuses que les cellules β, ce qui explique le rôle globalement hypoglycémiant du pancréas. Mais à concentrations identiques, le glucagon est plus efficace que l'insuline.

b. Faux. Le glucagon est une hormone hyperglycémiante.

c. Faux. Hyperglycémie et hypoglycémie sont détectées par les cellules α et β simultanément et en permanence.

d. Vrai. Le glucagon a le foie pour cible unique. Le glucagon inhibe la glycogénogenèse et stimule les glycogénolyse et néoglucogenèse hépatiques.

Exercice 5

Réponses correctes : a., b., d. et e.

b. Vrai. Les muscles peuvent consommer d'autres substrats que le glucose (les acides gras libres) et donc épargner le glucose sanguin. Ils participent donc indirectement au maintien de la glycémie lors d'une hypoglycémie due à un effort physique.

c. Faux. Le tissu adipeux ni aucun autre tissu non hépatique ne peut libérer du glucose libre dans le sang. Seul le foie en est capable.

e. Vrai. La glucagonémie augmente et l'insulinémie diminue en cas d'hypoglycémie.

Exercice 6

Réponse correcte : e.

a. Faux. L'insulinémie et la glucagonémie ne sont jamais nulles ni en hypoglycémie ni en hyperglycémie. De même, la glycémie n'est jamais nulle.

c. Faux. L'insuline s'oppose à l'augmentation de la glycémie.

e. Vrai. En l'absence de dysfonctionnement, l'augmentation de la glycémie est rapidement contenue par une augmentation transitoire de l'insulinémie. La glycémie revient donc rapidement à la normale.



MOTRICITÉ ET PLASTICITÉ CÉRÉBRALE

Jefaislepointsurmesconnaissances

❖ L'encéphale élabore l'action motrice grâce à la mémoire, aux émotions ou à la motivation. L'information nerveuse part ensuite vers les structures de l'encéphale qui constituent le niveau moyen (tronc cérébral, cervelet…) qui détermine la posture et les mouvements individuels nécessaires à la réalisation du mouvement prévu. Les neurones du niveau moyen reçoivent des informations en provenance des récepteurs situés au niveau des muscles, des tendons, des articulations, de la peau ainsi que de l'appareil vestibulaire (dans l'oreille interne) et des yeux. L'information est alors transmise par voie descendante au niveau local qui comprend les interneurones et les motoneurones correspondants.

❖ L'information afférente indiquant la position du corps et de ses segments est nommée proprioception.

❖ La motricité volontaire est possible grâce à un faisceau de neurones nommés faisceau pyramidal issu du cortex moteur primaire. Le faisceau de neurones traverse alors le tronc cérébral et le bulbe rachidien où de nombreux contacts synaptiques ont lieu pour se prolonger dans la moelle épinière jusqu'aux motoneurones au niveau de la corne antérieure de la moelle épinière.

❖ La plupart des influx synaptiques destinés aux motoneurones et provenant des voies descendantes atteignent des interneurones avec lesquels ils font synapses (les interneurones constituent en effet plus de 90 % des neurones de la moelle épinière). Ces interneurones jouent un rôle important pour déterminer quels seront les muscles activés et quand ils le seront. De plus, les interneurones peuvent aussi jouer le rôle « d'interrupteurs » en déclenchant ou en empêchant un mouvement.

❖ Le développement du cortex cérébral est sous le contrôle de gènes, mais les stimulations de l'environnement (l'expérience individuelle) peuvent modifier son organisation : c'est la **plasticité neuronale ou neuroplasticité**. La plasticité neuronale chez le jeune et chez l'adulte montre que tout au long de la vie, sous l'influence de stimulations de l'environnement, de nouveaux circuits neuroniques se mettent en place.

❖ Les connexions synaptiques se réorganisent sous l'influence de l'activité des neurones et des synapses : **de nouvelles synapses se forment** alors que **d'autres disparaissent**. La plasticité neuronale n'est pas limitée au seul cortex sensoriel : c'est une **propriété du système nerveux central**.

❖ La capacité à apprendre et à s'adapter aux conditions environnementales se maintient à l'âge adulte. La plasticité neuronale chez l'adulte est toutefois moindre que celle du jeune.

Je sais définir

❖ Encéphale, cervelet, bulbe rachidien, moelle épinière, cortex cérébral.

❖ Plasticité neuronale, motricité volontaire, réflexe.

❖ Synapse, neurotransmetteur/neuromédiateur, acétylcholine, curare.

Je sais maîtriser

❖ Les étapes de la transmission synaptique et le trajet des informations nerveuses sensitives ou motrices.

ENTRAÎNEMENTS

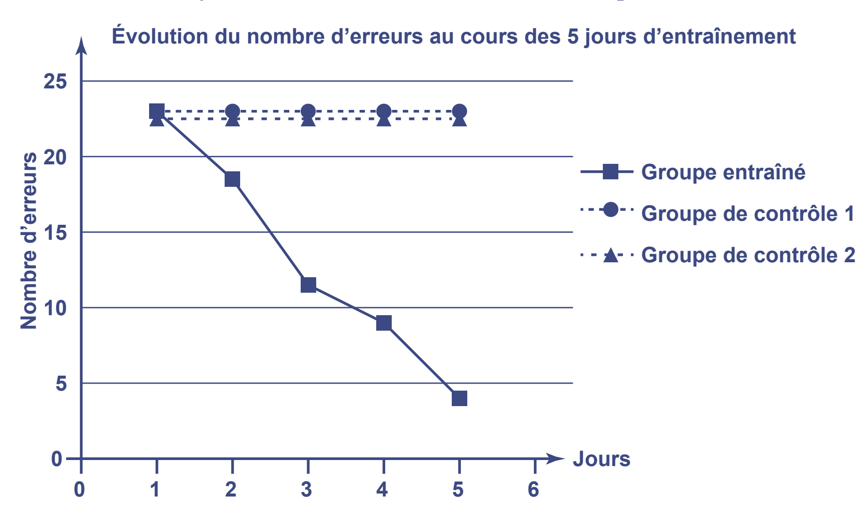
Exercice 1

Une activité volontaire, comme jouer du piano, nécessite un apprentissage des gestes des doigts des mains.

Expérience : Des sujets « naïfs » (non-instrumentistes) doivent apprendre des exercices au piano avec les 5 doigts de leur main droite. Ils doivent être attentifs à la justesse des notes. L'apprentissage dure 2 heures par jour pendant 5 jours. Cet apprentissage est suivi chaque fois d'un test musical où les sujets doivent reproduire une séquence de notes le mieux possible. Les résultats au test du groupe entraîné sont comparés avec des individus de deux groupes contrôles différents qui assistent simplement (et donc passivement) à l'apprentissage du groupe entraîné et sont présentés dans le document 23.



Document 23 : *Performance motrice au test musical au piano.*



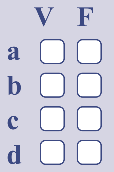
À partir de vos connaissances et de l'analyse rigoureuse du document 23, on peut affirmer que :

a. Ces résultats montrent qu'assister passivement au cours de piano suffit pour progresser.

b. Cette expérience prouve que la neuroplasticité du cerveau n'est pas la même chez tous les individus pour un type d'entraînement donné.

c. Cette expérience montre que la pratique réelle du piano est indispensable pour permettre aux étudiants d'améliorer leur dextérité au piano.

d. L'amélioration des performances motrices au piano peut probablement s'expliquer par une amélioration des réseaux synaptiques moteurs responsables de la motricité des membres supérieurs.



Exercice 2

Expérience : On cartographie la surface du cortex moteur qui contrôle l'exécution des mouvements des doigts chez les trois groupes de sujets de l'exercice précédent. Les résultats enregistrés chacun des 5 jours sur le cortex du groupe entraîné sont présentés dans le document 24 (pratique physique du piano). Ils sont comparés avec ceux d'un groupe de contrôle non entraîné (contrôle). Un troisième groupe a assisté aux séances et imagine mentalement (activement) la réalisation des exercices sans bouger réellement les doigts (pratique mentale).

Document 24 : *Surface du cortex moteur qui contrôle l'exécution des mouvements des doigts de la main (muscles extenseurs des doigts) chez les trois groupes testés. Les mêmes résultats sont observés pour les muscles fléchisseurs des doigts.*

Jours d'entraînement	1	2	3	4	5
Groupe pratiquant physiquement le piano					
Groupe contrôle					
Groupe réalisant la pratique mentale					

À partir de vos connaissances et de l'analyse rigoureuse du document 24, on peut affirmer que :

a. L'entraînement n'a pas d'effet sur la pratique du piano.

b. La pratique physique du piano et la pratique mentale donnent des résultats identiques.

c. La neuroplasticité cérébrale mise en évidence dans cette expérience permet d'expliquer l'amélioration des résultats : de nouvelles connexions corticales entre les différentes couches corticales améliorent la motricité fine, indispensable au piano.

d. Cette expérience prouve qu'une pratique mentale du piano peut suffire pour progresser.

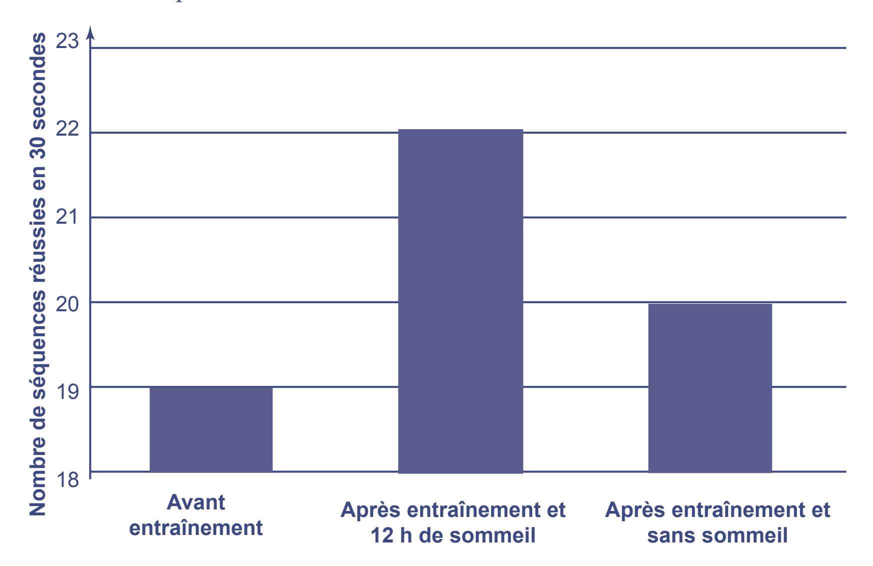
	V	F
a	☐	☐
b	☐	☐
c	☐	☐
d	☐	☐

BIOLOGIE

Exercice 3

Expérience : En parallèle de l'expérience précédente, un groupe de volontaires apprend à réaliser avec la main droite sur un clavier deux séquences successives. On réalise différentes mesures lors de l'entraînement qui dure 20 minutes par jour pendant 5 semaines dans des conditions de repos différentes. Les résultats sont présentés dans le document 25.

Document 25 : *Nombre de séquences correctes en 30 secondes avant tout entraînement et après un entraînement, avec ou sans sommeil.*



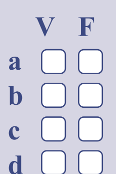
À partir de vos connaissances et de l'analyse rigoureuse du document 25, on peut affirmer que :

a. L'entraînement est le seul paramètre important pour améliorer sa pratique du piano.

b. Une bonne qualité de sommeil peut compenser un défaut d'entraînement.

c. Cette expérience permet de montrer l'influence du repos sur la consolidation des réseaux synaptiques acquis pendant les séquences d'entraînements.

d. Le sommeil n'a pas d'influence sur le fonctionnement du cerveau, mais il permet d'améliorer néanmoins ses capacités physiques.



CORRIGÉS

Exercice 1

Réponses correctes : c. et d.

a. Faux. Les sujets qui assistent passivement aux cours de piano continuent à faire des erreurs dans des proportions identiques alors que les sujets qui pratiquent réellement le piano font de moins en moins d'erreurs.

b. Faux. On ne peut pas discerner des capacités cérébrales différentes dans un groupe de sujet donné subissant un type d'entraînement donné. Il faudrait étudier chaque sujet.

c. Vrai. Le nombre d'erreurs du groupe entraîné diminue au fur et à mesure de l'entraînement par rapport aux deux contrôles qui ne pratiquent pas le piano.

d. Vrai. Les progrès du groupe entraîné sont un effet direct des stimulations sensorielles de la main droite (stimulations du cortex somesthésique) qui est responsable de l'amélioration des résultats : les connexions entre neurones corticaux s'adaptent aux stimuli sensoriels pour améliorer la motricité et diminuer ainsi le nombre d'erreurs.

Exercice 2

Réponses correctes : c. et d.

a. Faux. Les sujets entraînés présentent des surfaces corticales motrices supérieures à celles des sujets du groupe contrôle.

b. Faux. Même si la pratique mentale du piano engendre des surfaces corticales motrices d'une surface proche de celles obtenues par une pratique physique, on constate de plus grandes surfaces motrices corticales chez les sujets qui se sont réellement entraînés.

c. Vrai. Les aires du cortex sont organisées en six couches parallèles à la surface de l'encéphale. Chacune d'entre elles est constituée de neurones connectés aux neurones d'autres couches corticales et d'autres régions du cerveau. L'entraînement (mental ou physique) modifie ces connexions entre colonnes de différentes couches corticales.

d. Vrai. Les pratiques mentales et réelles du piano aboutissent à des progrès comparables (bien que légèrement supérieures pour la pratique réelle) dans l'augmentation de la surface corticale stimulée lors de l'exercice au cours du temps. Les centres supérieurs (imagination active) stimulent donc l'aire motrice cérébrale responsable des contractions des muscles extenseurs et fléchisseurs impliqués dans la pratique du piano.

Exercice 3

Réponse correcte : c.

a. Faux. Si l'entraînement est le paramètre le plus important, la durée de sommeil influence la qualité de sa pratique au piano : les erreurs augmentent quand on est privé de sommeil.

b. Faux. Si le sommeil améliore la pratique du piano, l'entraînement physique (ou mental) est indispensable pour permettre à la plasticité neuronale d'améliorer les connexions synaptiques impliquées dans le réseau cortical de neurones moteurs.

c. Vrai. Si les réseaux synaptiques moteurs se forment pendant l'entraînement (document 25), le sommeil est une étape indispensable à la neuroplasticité pour permettre aux nouvelles connexions synaptiques d'être durables.

d. Faux. La dextérité au piano ne dépend pas uniquement de qualités physiques, mais également de qualités cérébrales (réseau synaptique).

PARTIE 5

Concours blancs



MATHÉMATIQUES

- La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 2 heures.
- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.
- Aucun document n'est autorisé.
- L'usage du téléphone ou de tout autre objet communicant est interdit.
- *Les questions à choix multiples sont signalées par la mention QCM. Pour chaque QCM, plusieurs réponses sont proposées et il peut y avoir une ou plusieurs bonnes réponses. Vous entourerez la (ou les) réponse(s) choisie(s) sur la feuille de réponses. Aucune justification n'est demandée.*
- *Une réponse fausse ne sera pas pénalisée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse.*

Exercice 1

Partie A : Étude d'un triangle ABC

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on considère le triangle dont les sommets A, B et C sont définis par leurs coordonnées respectives :

A(6 ; 0), B(4 ; 8) et C(– 4 ; 0)

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$. Détailler le calcul.

3. Calculer la valeur exacte de la norme des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$. Détailler le calcul. Donner la réponse sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers avec b le plus petit possible.

4. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\widehat{ABC}\right)$. Justifier la réponse.

5. Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\widehat{ABC}\right)$. Justifier la réponse.

6. Montrer que la valeur exacte de l'aire du triangle ABC est 40 unités d'aire.

Partie B : Étude d'un tétraèdre ABCD

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère le tétraèdre dont les sommets A, B, C et D sont définis par leurs coordonnées respectives :

A(6 ; 0 ; 0), B(4 ; 8 ; 0), C(– 4 ; 0 ; 0) et D(– 4 ; 0 ; 20)

Le triangle ABC est celui étudié dans la partie A, placé dans le plan d'équation $z = 0$. La droite (DC) est parallèle à l'axe (Oz).

1. Que représente la droite (DC) pour le tétraèdre ABCD ?

2. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V=\frac{1}{3}\times A_{base}\times h$$

où A_{base} représente l'aire de la base de la pyramide et où h en représente la hauteur
Calculer la valeur exacte, en unités de volume, du volume V du tétraèdre ABCD. Détailler le calcul.

3. On donne le vecteur $\vec{n}(4;1;2)$. Calculer $\vec{n}\bullet\overrightarrow{BA}$. Détailler le calcul.

4. Justifier que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABD).

5. En déduire une équation cartésienne du plan (ABD). Détailler le calcul.

6. On note A' le point d'intersection du plan (ABD) avec l'axe (Oz). Donner les coordonnées de A'.

7. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{DA'}=k\overrightarrow{DA}$. Justifier la réponse.

8. **QCM** – Soit (P) le plan passant par A' et parallèle au plan (ABC). Soit (A'B'C') la section de (P) avec le tétraèdre ABCD. Quelle est la valeur approchée en unité de volume, arrondie à l'unité, du volume du tétraèdre A'B'C'D' ?
a. 17 unités de volume
b. 107 unités de volume
c. 160 unités de volume
d. 250 unités de volume

Partie C : Dans une sphère

On appelle plan médiateur d'un segment non réduit à un point, l'ensemble des points de l'espace équidistants des extrémités de ce segment. C'est le plan perpendiculaire au segment en son milieu.

1. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment [AC].

2. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
En déduire qu'une équation du plan médiateur P_1 du segment [AC] est $x = 1$. Justifier la réponse.
Justifier qu'une équation du plan médiateur P_2 du segment [AB] est $x - 4y + 11 = 0$.
On admet qu'une équation du plan médiateur P_3 du segment [CD] est $z = 10$.

3. En utilisant les équations des plans médiateurs, déterminer les coordonnées du centre Ω de la sphère (S) circonscrite au tétraèdre ABCD. Détailler le calcul.

4. Calculer le rayon R de la sphère (S). Détailler le calcul.

Exercice 2

Tous les résultats de cet exercice seront donnés sous forme de fraction irréductible.
Les parties A et B sont indépendantes.

Soient A et B deux pièces de monnaie. La pièce A donne « Face » avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et la pièce B donne « Face » avec la probabilité $\frac{1}{4}$. Lorsqu'on lance une de ces pièces, si on obtient « Face », on conserve cette pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce.

Partie A : Trois lancers successifs de pièces

On effectue une série de trois lancers, en commençant par la pièce A. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et 3, on note F_i l'événement « on obtient « Face » au $i^{\text{ème}}$ lancer » et $P_i = \overline{F_i}$ l'événement contraire.

1. Compléter l'arbre de probabilités donné.

2. X désigne la variable aléatoire donnant le nombre de fois où « Face » est obtenu.
Compléter le tableau donnant la loi de probabilité de X.

3. Calculer l'espérance de X.

Partie B : Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \textit{pour tout } n \geq 0,\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

1. Donner les valeurs de u_1 et u_2.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

pour tout $n \geq 0$, $v_n = u_n - \dfrac{3}{5}$

a. Donner la valeur de v_0.
b. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{4}$.

3. Déduire de ce qui précède que, pour tout $n \geq 0$, $u_n = -\dfrac{8}{5}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n + \dfrac{3}{5}$.

4. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $\dfrac{3}{5}$.

Partie C : *n* lancers successifs des pièces

Dans cette partie, on ne se limite plus à trois lancers.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère les événements suivants :

- A_n : « on utilise la pièce A pour le $n^{\text{ième}}$ lancer »
- $\overline{A_n}$: « on utilise la pièce B pour le $n^{\text{ième}}$ lancer ».

On note $p_n = P(A_n)$. On commence toujours par lancer la pièce A et on a donc $p_1 = 1$.

1. Donner $P_{A_n}\left(A_{n+1}\right)$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$.

2. Donner l'expression de $P(\overline{A_n})$, $P(A_{n+1} \cap A_n)$ et $P(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$ en fonction de p_n.

3. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{3}{4}$

4. On note F_n l'événement « obtenir « Face » au $n^{\text{ième}}$ lancer.
   a. Donner l'expression de $P(F_n \cap A_n)$ et $P(F_n \cap \overline{A_n})$ en fonction de p_n.
   b. Déterminer la limite de la probabilité $P(F_n)$ quand n tend vers $+\infty$. Justifier la réponse.

Exercice 3

Les parties A et B sont indépendantes. La partie C dépend des deux premières.

On souhaite étudier l'évolution au cours du temps de la concentration d'un analgésique dans le sang : par voie intraveineuse dans la partie A, puis par voie orale dans la partie B.

Partie A : Voie intraveineuse

Dans cette partie, λ est une constante réelle strictement positive.

On considère l'équation différentielle (E_1) : $y'(t) = -\lambda y(t)$, où y est une fonction définie pour tout réel t.

1. Déterminer la solution générale de (E_1).

2. On appelle Q la solution de (E_1) qui vérifie $Q(0) = 0{,}6$. Donner l'expression de Q en fonction de λ. Justifier la réponse.

3. Donner la limite de Q en $+\infty$. Donner le sens de variations de Q. Aucune justification n'est demandée.

À l'instant $t = 0$, une dose d'un analgésique est injectée dans le sang par voie intraveineuse. La substance se répartit instantanément dans le sang, ce qui donne une concentration initiale de 0,6 mg/L, et est ensuite progressivement éliminée.

Pour $t \geq 0$, la concentration médicament, mg/L, présente dans le sang à l'instant t (exprimée en heures) est égale à $Q(t)$ trouvée à la question **2**.

Au bout d'une heure, la concentration de médicament présente dans le sang a diminué de 30 %.

4. Calculer la valeur de λ. On donnera la valeur exacte puis une approchée à 10^{-4} près. Justifier la réponse.

Le médicament est efficace tant que sa concentration dans le sang est supérieure à 0,1 mg/L.

5. Déterminer, en heures, le temps d'efficacité te du médicament. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près. Justifier la réponse.

Partie B : Voie orale

On considère l'équation différentielle (E_2) : $y'(t)+y(t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}$

6. Vérifier que la fonction g définie, pour tout réel t, par $g(t) = e^{-\frac{t}{2}}$ est une solution de (E_2).

7. En déduire la solution générale de (E_2).

8. Donner la solution f de (E_2) vérifiant $f(0) = 0$. Justifier la réponse.

On considère la fonction q définie sur $[0 ; +\infty[$ par $q(t)= e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}$. On note C_q la courbe représentative de q dans le repère rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

9. Donner la limite de q en $+\infty$. En déduire une équation de l'asymptote Δ à C_q en $+\infty$.

10. q' désigne la fonction dérivée de q. Pour tout réel positif t, $q'(t)$ s'écrit sous la forme :

$$q'(t)= e^{-\frac{t}{2}}(ae^{-\frac{t}{2}}+ b)$$

Donner la valeur de a et de b. Justifier la réponse.

11. Donner l'ensemble des solutions réelles t de l'inéquation $q'(t)> 0$. Justifier la réponse.

12. Soit A le point de C_q d'abscisse $x_A = \ln(4)$ et y_A. Calculer la valeur exacte de y_A. Détailler le calcul.

13. Compléter le tableau de variations de q sur $[0 ; +\infty[$.

À l'instant $t = 0$, un analgésique est administré par voie orale en une prise. La substance est absorbée progressivement dans le sang puis éliminée.

Pour tout $t \geq 0$, la concentration de médicament, en mg/L, présente dans le sang à l'instant t (exprimé en heures) est égale à 0,3 mg/L.

Le médicament cause des effets indésirables quand sa concentration dans le sang est supérieure à 0,3 mg/L.

14. Le médicament va-t-il causer des effets indésirables au patient ? Justifier la réponse.

Partie C : Comparaison des deux méthodes

15. QCM – Quel mode d'administration choisirons-nous si nous voulons être tout de suite soulagé de la douleur ?

❒ **a.** Voie orale
❒ **b.** Voie intraveineuse
❒ **c.** Peu importe lequel

16. QCM – Sachant que l'analgésique est efficace quand la concentration dans le sang est supérieure à 0,1 mg/L par les deux méthodes, quel mode d'administration choisirons-nous si nous voulons que ce médicament soit efficace le plus longtemps possible ?

❒ **a.** Voie orale
❒ **b.** Voie intraveineuse
❒ **c.** Peu importe lequel

CORRIGÉS

Exercice 1

Partie A : Étude d'un triangle ABC

1. Coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}6-4\\0-8\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4-4\\0-8\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-8\\-8\end{pmatrix}$

2. Produit scalaire $\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC} = x_{\overrightarrow{BA}} \times x_{\overrightarrow{BC}} + y_{\overrightarrow{BA}} \times y_{\overrightarrow{BC}}$

$\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC} = 2\times(-8)+(-8)\times(-8) = -16+64 = 48$

3. Norme des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BA} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

$\overrightarrow{BA} = \sqrt{(6-4)^2+(0-8)^2} = \sqrt{2^2+(-8)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$

$\overrightarrow{BA} = \sqrt{4\times 17} = 2\sqrt{17}$ unités de longueur

$\overrightarrow{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

$\overrightarrow{BC} = \sqrt{(-4-4)^2+(0-8)^2} = \sqrt{(-8)^2+(-8)^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{128}$

$\overrightarrow{BC} = \sqrt{64\times 2} = 8\sqrt{2}$ unités de longueur

4. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\widehat{ABC}\right)$. Justifier la réponse.

En appliquant une autre formule du produit scalaire, on obtient :

$\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC} = BA\times BC\times \cos\left(\widehat{ABC}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}}{BA\times BC}$

Puis en effectuant l'application numérique :

$\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{48}{2\sqrt{17}\times 8\sqrt{2}} = \dfrac{48}{16\times\sqrt{34}} = \dfrac{3}{\sqrt{34}} = \dfrac{3\sqrt{34}}{34} \approx 0{,}514$

5. Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\widehat{ABC}\right)$. Justifier la réponse.

En se remémorant la formule de trigonométrie $\cos^2(a)+\sin^2(a)=1$, on obtient :

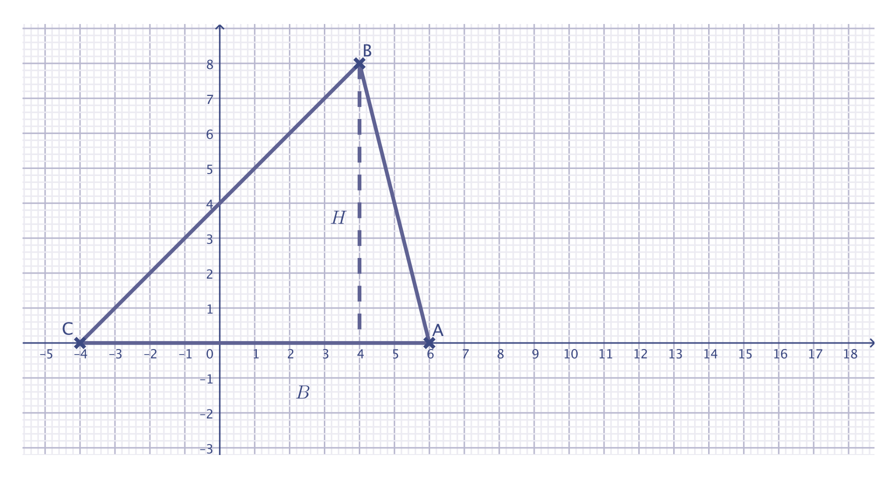
$$\cos^2\left(\widehat{ABC}\right)+\sin^2\left(\widehat{ABC}\right)=1 \Leftrightarrow \sin^2\left(\widehat{ABC}\right)=1-\cos^2\left(\widehat{ABC}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\left(\widehat{ABC}\right)=1-\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)^2=1-\frac{9}{34}=\frac{34}{34}-\frac{9}{34}=\frac{25}{34}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\widehat{ABC}\right)=\sqrt{\frac{25}{34}}=\frac{5}{\sqrt{34}}\approx 0{,}857$$

6. L'aire du triangle ABC est égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur :

$$A_{ABC}=\frac{B\times H}{2}=\frac{(6-(-4))\times(8-0)}{2}=\frac{10\times 8}{2}=\frac{80}{2}=40 \text{ unités d'aire}$$



Partie B : Étude d'un tétraèdre ABCD

1. La droite (DC) représente la hauteur du tétraèdre ABCD.

2. Le volume de la pyramide ABCD est donné par :

$$V=\frac{1}{3}\times A_{base}\times h=\frac{1}{3}\times A_{ABC}\times DC$$

En effectuant l'application numérique, on obtient :

$$DC=\|\overrightarrow{DC}\|=\sqrt{(x_C-x_D)^2+(y_C-y_D)^2+(z_C-z_D)^2}$$

$$DC=\sqrt{(-4-(-4))^2+(0-0)^2+(0-20)^2}=\sqrt{0^2+0^2+(-20)^2}=\sqrt{400}$$

$DC=20$ unités de longueur

$$V=\frac{1}{3}\times 40\times 20=\frac{800}{3} \text{ unités de volume}$$

3. Produit scalaire $\vec{n} \bullet \overrightarrow{BA}$

Tout d'abord, on calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BA}$ dans l'espace :

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 6-4 \\ 0-8 \\ 0-0 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{BA} = x_{\vec{n}} \times x_{\overrightarrow{BA}} + y_{\vec{n}} \times y_{\overrightarrow{BA}} + z_{\vec{n}} \times z_{\overrightarrow{BA}}$$

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{BA} = 4 \times 2 + 1 \times (-8) + 2 \times 0 = 8 - 8 + 0 = 0$$

On en déduit que les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont orthogonaux.

4. Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{BA}$ étant orthogonaux, le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABD) contenant le vecteur $\overrightarrow{BA}$.

5. Équation cartésienne du plan (ABD)

Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABD), on déduit qu'une équation cartésienne de ce plan est :

$4x + y + 2z + d = 0$

Pour déterminer d, on utilise le fait que le point A(6 ; 0 ; 0) appartient à ce plan et que donc ses coordonnées vérifient ses équations :

$$4x_A + y_A + 2z_A + d = 0 \Leftrightarrow 4 \times 6 + 1 \times 0 + 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow 24 + d = 0 \Leftrightarrow d = -24$$

Finalement une équation cartésienne du plan (ABD) est :

$4x + y + 2z - 24 = 0$

6. Coordonnées de A', point d'intersection du plan (ABD) avec l'axe (Oz)

A' est situé sur l'axe (Oz) donc x'_A et y'_A sont nuls.

Ainsi en reportant ces valeurs dans l'équation obtenue à la question précédente :

$$4x_{A'} + y_{A'} + 2z_{A'} - 24 = 0 \Leftrightarrow 4 \times 0 + 0 + 2 \times z_{A'} - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2z_{A'} - 24 = 0 \Leftrightarrow z_{A'} = \frac{24}{2} \Leftrightarrow z_{A'} = 12$$

Finalement A' a pour coordonnées A'(0 ; 0 ; 12).

7. Valeur de k tel que $\overrightarrow{DA'} = k\overrightarrow{DA}$

$$\overrightarrow{DA'}\begin{pmatrix} 0-(-4) \\ 0-0 \\ 12-20 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{DA'}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} 6-(-4) \\ 0-0 \\ 0-20 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{DA'} = \frac{4}{10}\overrightarrow{DA} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DA}$ donc $k = \frac{2}{5}$

8. **QCM** – Le volume du tétraèdre A'B'C'D est de 17 unités de volume. La bonne réponse est **a**.

Partie C : Dans une sphère

1. Coordonnées du milieu I de [AC]

$$x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{6+(-4)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$$

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$$

Finalement I(1 ; 0 ; 0).

2. Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -4-6 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est normal au plan P_1 et I appartient à P_1

Une équation du plan P_1 est donc $-10x + d = 0$, soit $-10x + d = 0$

Pour obtenir d, on vérifie que les coordonnées de I vérifient l'équation précédente :

$$-10x_I + d = 0 \Leftrightarrow -10 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow -10 + d = 0 \Leftrightarrow d = 10$$

Ainsi une équation de P_1 est donc $-10x + 10 = 0$ et en divisant par -10, on obtient : $x - 1 = 0$, soit $x = 1$.

Coordonnées du milieu J de [AB]

$$x_J = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$y_J = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+8}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$z_J = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$$

Finalement J(5 ; 4 ; 0).

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-6\\8-0\\0-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est normal au plan P_2 et J appartient à P_2

Une équation du plan P_2 est donc $-2x+8y+0z+d=0$ soit $-2x+8y+d=0$

Pour obtenir d, on vérifie que les coordonnées de J vérifient l'équation précédente :

$$-2x_J+8y_J+d=0 \Leftrightarrow -2\times 5+8\times 4+d=0 \Leftrightarrow -10+32+d=0$$
$$\Leftrightarrow 22+d=0 \Leftrightarrow d=-22$$

Ainsi une équation de P_2 est donc $-2x+8y-22=0$ et en divisant par -2, on a :
$x-4y+11=0$.

3. Le centre Ω de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD est solution du système suivant :

$$\begin{cases}x=1\\x-4y+11=0\\z=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\1-4y+11=0\\z=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\-4y+12=0\\z=10\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=\dfrac{12}{4}\\z=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=3\\z=10\end{cases}$$

Ainsi le centre Ω de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD a pour coordonnées :

Ω(1 ; 3 ; 10)

4. Le rayon R de la sphère est égal aux longueurs AΩ, BΩ, CΩ et DΩ.

Ainsi $R = \text{A}\Omega$ en choisissant par exemple la longueur AΩ :

$$R=\text{A}\Omega=\|\overrightarrow{\text{A}\Omega}\|=\sqrt{(x_\Omega-x_A)^2+(y_\Omega-y_A)^2+(z_\Omega-z_A)^2}$$
$$R=\sqrt{(1-6)^2+(3-0)^2+(10-0)^2}=\sqrt{(-5)^2+3^2+10^2}$$
$$R=\sqrt{25+9+100}=\sqrt{134} \text{ unités de longueur}$$

➠ **Remarque :** Avec les autres arêtes du tétraèdre ABCD, vous obtenez :

$$R = B\Omega = \overrightarrow{B\Omega} = \sqrt{(x_\Omega - x_B)^2 + (y_\Omega - y_B)^2 + (z_\Omega - z_B)^2}$$

$$R = \sqrt{(1-4)^2 + (3-8)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + 10^2}$$

$R = \sqrt{9+25+100} = \sqrt{134}$ unités de longueur

$$R = C\Omega = \| \overrightarrow{C\Omega} \| = \sqrt{(x_\Omega - x_C)^2 + (y_\Omega - y_C)^2 + (z_\Omega - z_C)^2}$$

$$R = \sqrt{(1-(-4))^2 + (3-0)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{5^2 + 3^2 + 10^2}$$

$R = \sqrt{25+9+100} = \sqrt{134}$ unités de longueur

$$R = D\Omega = \| \overrightarrow{D\Omega} \| = \sqrt{(x_\Omega - x_D)^2 + (y_\Omega - y_D)^2 + (z_\Omega - z_D)^2}$$

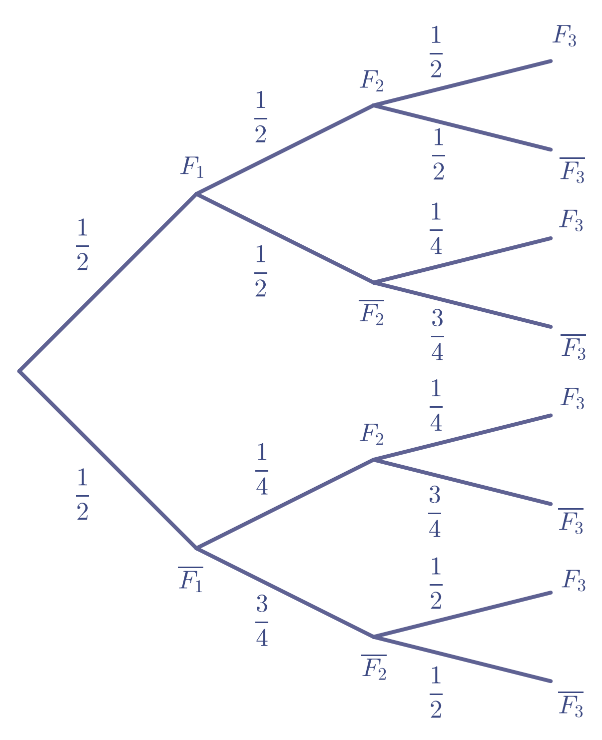
$$R = \sqrt{(1-(-4))^2 + (3-0)^2 + (10-20)^2} = \sqrt{5^2 + 3^2 + 10^2}$$

$R = \sqrt{25+9+100} = \sqrt{134}$ unités de longueur

Exercice 2

Partie A : Trois lancers successifs des pièces

1. Arbre de probabilité



2. Loi de probabilité de X

$X(\Omega)=\{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\}$

$$P(X=0)=P\left(\overline{F_1}\cap\overline{F_2}\cap\overline{F_3}\right)$$

$$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}=\frac{6}{32}$$

$$P(X=1)=P\left(F_1\cap\overline{F_2}\cap\overline{F_3}\right)+P\left(\overline{F_1}\cap F_2\cap\overline{F_3}\right)+P\left(\overline{F_1}\cap\overline{F_2}\cap F_3\right)$$

$$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}+\frac{3}{32}+\frac{3}{16}=\frac{6}{32}+\frac{3}{32}+\frac{6}{32}=\frac{15}{32}$$

$$P(X=2)=P\left(F_1\cap F_2\cap\overline{F_3}\right)+P\left(\overline{F_1}\cap F_2\cap F_3\right)+P\left(F_1\cap\overline{F_2}\cap F_3\right)$$

$$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}=\frac{4}{32}+\frac{1}{32}+\frac{2}{32}=\frac{7}{32}$$

$$P(X=3)=P\left(F_1\cap F_2\cap F_3\right)$$

$$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=\frac{4}{32}$$

Ainsi la loi de probabilité de X est donnée par :

X	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{3}{16}=\frac{6}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{1}{8}=\frac{4}{32}$

3. Espérance de X

$$E(X)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)+3\times P(X=3)$$

$$E(X)=0\times\frac{6}{32}+1\times\frac{15}{32}+2\times\frac{7}{32}+3\times\frac{4}{32}=0+\frac{15}{32}+\frac{14}{32}+\frac{12}{32}=\frac{41}{32}$$

Partie B : Étude d'une suite

1. Valeurs de u_1 et u_2

$$u_1=-\frac{1}{4}u_0+\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}\times(-1)+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$$

$$u_2=-\frac{1}{4}u_1+\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}\times 1+\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$$

2. Soit $v_n=u_n-\frac{3}{5}$

a. $v_0=u_0-\frac{3}{5}=-1-\frac{3}{5}=-\frac{5}{5}-\frac{3}{5}=-\frac{8}{5}$

b. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, en effet :

$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{3}{5}$ au rang $n+1$

$v_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4} - \frac{3}{5}$ en remplaçant u_{n+1} par son expression

$v_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n + \frac{15}{20} - \frac{12}{20}$ en réduisant au même dénominateur

$v_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{20}$ après calculs

$v_{n+1} = -\frac{1}{4}\left(u_n - \frac{3}{5}\right)$ en factorisant par $-\frac{1}{4}$ $v_{n+1} = -\frac{1}{4}v_n$ en reconnaissant l'expression de v_n

Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{8}{5}$

3. En appliquant la formule d'une suite géométrique $v_n = v_0 \times q^n$, on a :

$$v_n = -\frac{8}{5} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

Puis :

$$v_n = u_n - \frac{3}{5} \Leftrightarrow u_n = v_n + \frac{3}{5} = -\frac{8}{5} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{3}{5}$$

4. Limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} -\frac{8}{5} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{3}{5} = -\frac{8}{5} \times 0 + \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-\frac{1}{4}$ est compris entre -1 et 1 donc $\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C : *n* lancers successifs des pièces

1. $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{3}{4}$

2. $P\left(\overline{A_n}\right)=1-P\left(A_n\right)=1-p_n$

$$P\left(A_{n+1}\cap A_n\right)=P\left(A_n\right)\times P_{A_n}\left(A_{n+1}\right)=p_n\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}p_n$$

$$P\left(A_{n+1}\cap\overline{A_n}\right)=P\left(\overline{A_n}\right)\times P_{\overline{A_n}}\left(A_{n+1}\right)=\left(1-p_n\right)\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}p_n$$

3. $p_{n+1}=P\left(A_{n+1}\right)=P\left(A_{n+1}\cap A_n\right)+P\left(A_{n+1}\cap\overline{A_n}\right)=\frac{1}{2}p_n+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}p_n=-\frac{1}{4}p_n+\frac{3}{4}$

D'après ce qui précède et la question 6, on a $p_n=-\frac{8}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n+\frac{3}{5}$, pour tout entier naturel $n\geq 1$.

4. F_n : « obtenir « Face » au $n^{\text{ième}}$ lancer »

a. $P\left(F_n\cap A_n\right)=\frac{1}{2}p_n$ et $P\left(F_n\cap\overline{A_n}\right)=\frac{1}{4}\left(1-p_n\right)$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty}P(F_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(F_n\cap A_n\right)+P\left(F_n\cap\overline{A_n}\right)$

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(F_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{4}\left(1-p_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}p_n$$

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(F_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}u_n+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{4}$$

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(F_n\right)=\frac{3}{20}+\frac{1}{4}=\frac{3}{20}+\frac{5}{20}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

Exercice 3

Partie A : Voie intraveineuse

1. Solution générale de (E_1) : $y(t)=ke^{-\lambda t}$ où k est un réel.

2. $Q(0)=0,6\Leftrightarrow ke^{-0t}=0,6\Leftrightarrow ke^{0}=0,6\Leftrightarrow k\times 1=0,6\Leftrightarrow k=0,6$
Ainsi $Q(t)=0,6e^{-\lambda t}$

3. $\lim\limits_{t\to\infty}Q(t)=0$

Q est strictement décroissante

4. À $t=1$, $Q(1)=Q(0)\times(1-0,3)\Leftrightarrow Q(1)=0,7\times Q(0)\Leftrightarrow Q(1)=0,7\times 0,6$
$\Leftrightarrow Q(1)=0,42$

$$Q(1)=0,42\Leftrightarrow 0,6e^{-\lambda\times 1}=0,42\Leftrightarrow 0,6e^{-\lambda}=0,42\Leftrightarrow e^{-\lambda}=\frac{0,42}{0,6}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda}=0,7\Leftrightarrow-\lambda=\ln(0,7)\Leftrightarrow\lambda=-\ln(0,7)$$

La valeur exacte de λ est $-\ln(0,7)$

Une valeur approchée de λ à 10^{-4} près est 0,3567.

5. Le médicament est efficace tant que sa concentration dans le sang est supérieure à 0,1 mg/L.

On résout l'inéquation $Q(t) > 0{,}1$:

$$Q(t) \geq 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}6e^{-\lambda t} \geq 0{,}1 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} \geq \frac{0{,}1}{0{,}6} \Leftrightarrow e^{-\lambda t} \geq \frac{1}{6} \Leftrightarrow -\lambda t \geq \ln\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow -t \geq \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow -t \geq \frac{1}{\lambda} \times \left(-\ln(6)\right) \text{ car } \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\Leftrightarrow -t \geq \frac{-\ln(6)}{\lambda} \Leftrightarrow t \leq \frac{\ln(6)}{\lambda}$$ en multipliant par (–1) de part et d'autre de l'inégalité

➠ **Attention :** N'oubliez pas de changer le sens de l'inégalité lorsque vous multipliez par –1 qui est négatif !

$$\Leftrightarrow t \leq \frac{\ln(6)}{-\ln(0{,}7)}$$

Ainsi le temps d'efficacité t_e du médicament est donné par :

$$\Leftrightarrow t_e = \frac{\ln(6)}{-\ln(0{,}7)}$$

Ainsi $t_e = \dfrac{\ln(0{,}1)}{-\ln(0{,}7)} \approx 5{,}02$ heures en arrondissant à 10^{-2} près.

➠ **Remarque :**

5,02 heures = 5 heures + 0,02 heure

= 5 heures + 0,02 × 60 minutes

= 5 heures + 1,2 minute

= 5 heures + 1 minute + 0,2 minute

= 5 heures + 1 minute + 0,2 × 60 secondes

= 5 heures + 1 minute + 12 secondes

= 5 h 01 min 12 s

Partie B : Voie orale

6. On considère l'équation différentielle (E_2) : $y'(t) + y(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}$

$g(t) = e^{-\frac{t}{2}}$ est une solution de (E_2), en effet :

$$g'(t) + g(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} + \frac{2}{2}e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}$$

7. Solution générale de (E_2) :

$y(t)=y_p(t)+y_h(t)$

où $y_p(t)$ est une solution particulière de l'équation (E_2), soit $y_p(t)=g(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ d'après la question précédente

et $y_h(t)$ est la solution homogène de l'équation (E_2), c'est-à-dire la solution de l'équation (E_2) sans second membre : $y'(t)+y(t)=0$

$$y'(t)+y(t)=0 \Leftrightarrow y'(t)=-y(t) \Leftrightarrow \frac{y'(t)}{y(t)}=-1$$

$\Leftrightarrow \ln(y(t))=-t+C$ en intégrant par rapport à t et où C est un réel (constante d'intégration)

$\Leftrightarrow y(t)=\mathrm{e}^{-t+C}$ en passant à l'exponentielle

$\Leftrightarrow y(t)=\mathrm{e}^{-t}\times\mathrm{e}^{C}$ car $\mathrm{e}^{a+b}=\mathrm{e}^{a}\times\mathrm{e}^{b}$

$\Leftrightarrow y(t)=\mathrm{e}^{-t}\times k$ en posant $k=\mathrm{e}^{C}$

Finalement la solution homogène de l'équation (E_2) est $y(t)=k\mathrm{e}^{-t}$

Ainsi la solution générale de (E_2) est :

$$y(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}+k\mathrm{e}^{-t}$$

8. Solution f de (E_2) telle que $f(0)=0$:

$f(t)$ est de la forme $f(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}+k\mathrm{e}^{-t}$ et vérifie $f(0)=0$

$$f(0)=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{0}{2}}+k\mathrm{e}^{-0}=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{0}+k\mathrm{e}^{0}=0 \Leftrightarrow 1+k\times 1=0 \Leftrightarrow 1+k=0$$

$\Leftrightarrow k=-1$ et finalement :

$$f(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}-\mathrm{e}^{-t}$$

On considère la fonction q définie sur $[0\,;+\infty[$ par $q(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}-\mathrm{e}^{-t}$. On note C_q la courbe représentative de q dans le repère rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j})$.

9. Limite de q en $+\infty$

$$\lim_{t\to+\infty} q(t)=\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}-\mathrm{e}^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}-\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-t}=0-0=0$$

Donc C_q admet une asymptote horizontale Δ d'équation $y = 0$ (axe des abscisses)

10. On calcule d'abord la dérivée de $q(t)$:

$$q'(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} - \left(-e^{-t}\right) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} + e^{-t}$$

$q'(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(-\frac{1}{2} + e^{-\frac{t}{2}}\right)$ en factorisant par $e^{-\frac{t}{2}}$ et finalement :

$$q'(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\right)$$

Par identification à l'expression $q'(t) = e^{-\frac{t}{2}}(ae^{-\frac{t}{2}} + b)$ donnée dans l'énoncé, on obtient finalement :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

11. Solutions de l'inéquation $q'(t) > 0$:

$$q'(t) > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{2}}\left(e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2} > 0$$

car $e^{-\frac{t}{2}} > 0$ une exponentielle est toujours strictement positive

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{2}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{t}{2} > \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -\frac{t}{2} > -\ln(2)$$

$$\text{car } \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$\Leftrightarrow t < 2\ln(2)$ en multipliant par (– 2) de part et d'autre de l'inégalité.

➠ **Attention :** (–2) est négatif donc on change le sens de l'inégalité.

Finalement l'ensemble des solutions de l'inéquation $q'(t) > 0$ est $t < 2\ln(2)$

➠ **Remarque :**

$$2\ln(2) = \ln\left(2^2\right) = \ln(4)$$

Donc les solutions de l'inéquation $q'(t) > 0$ s'écrivent aussi $t < \ln(4)$

12. $y_A = q\left(x_A\right)$

$$y_A = q(\ln(4)) = e^{-\frac{\ln(4)}{2}} - e^{-\ln(4)} \text{ en remplaçant } t \text{ par } \ln(4)$$

$$y_A = e^{-\frac{2\ln(2)}{2}} - e^{-\ln(4)} \text{ car } \ln(4) = 2\ln(2)$$

$$y_A = e^{-\ln(2)} - e^{-\ln(4)} \text{ après calculs}$$

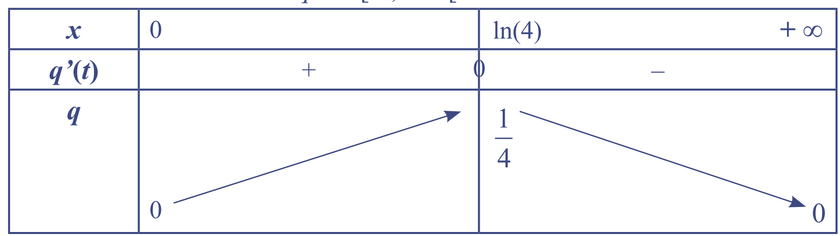
$$y_A = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} \text{ car } \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$y_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \text{ car } e^{\ln(a)} = a$$

Et finalement :

$$y_A = \frac{1}{4}$$

13. Tableau de variations de q sur $[0\ ;+\infty[$:



x	0		$\ln(4)$		$+\infty$
$q'(t)$		+	0	–	
q	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

14. La fonction $q(t)$ a pour valeur maximale $\frac{1}{4} = 0,25$ qui est inférieure à 0,3. Ainsi l'analgésique ne cause pas d'effets indésirables au patient.

Partie C : Comparaison des deux méthodes

15. QCM – Nous choisirons la voie intraveineuse si nous voulons être tout de suite soulagé de la douleur. La bonne réponse est **b**.

16. QCM – Nous choisirons la voie intraveineuse si nous voulons que ce médicament soit efficace le plus longtemps possible. La bonne réponse est **b**.

Sujet original

MATHÉMATIQUES

- **La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 2 heures.**
- **L'usage de la calculatrice est autorisé.**
- **Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.**
- **Aucun document n'est autorisé.**
- **L'usage du téléphone ou de tout autre objet communicant est interdit.**

EXERCICE 1

Partie A : Intégrales de Wallis

Soient I_n et J_n les intégrales définies pour tout entier naturel n tel que :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$$

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Calculer J_0 et J_1.

3. Calculer la somme $J_2 + I_2$ puis la différence $J_2 - I_2$.

4. En déduire les valeurs de I_2 et J_2.

5. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

6. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

7. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} J_n$.
Rappel : formule d'intégration par parties :

$$\int uv' = [uv] - \int u'v$$

où u et v' sont des fonctions à choisir de manière astucieuse.
u' s'obtient en dérivant u.
v s'obtient en intégrant v'.
On cherche à démontrer par récurrence que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

8. Initialisation : Rappeler la valeur de I_2 puis calculer I_4.

9. Hérédité : Utiliser le raisonnement de la question **7** pour prouver l'hérédité.

10. Conclure.

Partie B : Intégrales de Gauss

On cherche à calculer l'intégrale suivante :

$$G = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

1. Soit T une variable aléatoire de loi normale centrée réduite N(0 ; 1).

- Rappeler l'expression de la fonction de densité de T.
- Rappeler les propriétés d'une fonction de densité.
- En déduire la valeur de :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

2. À l'aide de ce qui précède et en utilisant la parité de la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$, calculer la valeur de J définie par :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

3. En déduire la valeur de K définie par :

$$K = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

4. À l'aide d'un changement de variable astucieux, calculer enfin la valeur de G :

$$G = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

Exercice 2

Tous les résultats de cet exercice seront donnés sous forme de fraction irréductible.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A : Tirages successifs avec remise

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune cinq boules.
L'urne U_1 contient deux boules rouges et trois boules bleues.
L'urne U_2 contient une boule rouge et quatre boules bleues.
Dans un premier temps, on effectue deux tirages successifs avec remise selon les modalités suivantes :

• On choisit l'urne au hasard.

• Si on obtient une boule rouge alors on la remet dans l'urne et on effectue le deuxième tirage dans l'autre urne.

• Si on obtient une boule bleue alors on la remet dans l'urne et on effectue le deuxième tirage dans la même urne que le précédent.

1. Compléter l'arbre de probabilités donné.

2. X désigne la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges obtenues.
Compléter le tableau donnant la loi de probabilité de X.

3. Calculer l'espérance de X.
Calculer la probabilité que la première boule tirée soit rouge, puis la probabilité que la deuxième boule tirée soit rouge.

4. On effectue trois tirages avec remise. Montrer que la probabilité que la troisième boule tirée soit rouge est de $\frac{34}{125}$.

Partie B : Étude d'une suite

On effectue cette fois-ci, n tirages successifs avec remise.
Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est rouge ».
On pose également pour tout entier naturel n non nul, $p_n = P(A_n)$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = p_1 \\ \text{pour tout } n > 1, u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

1. On considère que les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont tels que :

$$\begin{cases} u_1 = p_1 \\ u_2 = p_2 \\ u_3 = p_3 \end{cases}$$

À l'aide des valeurs p_1, p_2 et p_3, déterminer les réels a et b.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : pour tout $n \geq 1$, $v_n = u_n - \frac{4}{15}$.
• Donner la valeur de v_1.
• Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a.

3. Déduire de ce qui précède que, pour tout $n \geq 0$, $u_n = \frac{1}{30}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{4}{15}$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

5. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Que pouvez-vous en déduire ?

Partie C : Tirages successifs sans remise

Dans cette partie et jusqu'à la question 15, on se limite à deux tirages successifs et sans remise.

Les données sont les mêmes mais il n'y a plus de remise.

1. Dessiner un nouvel arbre de probabilités.

2. X désigne la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges obtenues au cours des deux tirages.

Compléter le tableau donnant la loi de probabilité de X.

3. Calculer l'espérance de X.

4. Calculer la probabilité que la première boule tirée soit rouge, puis la probabilité que la deuxième boule tirée soit rouge.

On effectue maintenant trois tirages successifs et sans remise.

5. Montrer que la probabilité que la troisième boule tirée soit rouge est de $\frac{35}{100}$.

Exercice 3

*Les **parties A** et **B** sont dépendantes et la partie **C** est indépendante des deux premières.*

Partie A : Étude du triangle ABG

On considère le cube ABFCHGED et le repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{AG}$.

3. Déterminer la norme des vecteurs précédents.

4. Déterminer la nature du triangle ABG.

5. Calculer $\cos\left(\widehat{BAG}\right)$.

6. Calculer l'aire du triangle ABG.

Partie B : Étude d'un plan

1. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABG).

2. En déduire un vecteur normal au plan (ABG).

Partie C : Étude d'une sphère

1. Déterminer les coordonnées du centre de la sphère circonscrite au cube de la partie A.

2. Déterminer le rayon de la sphère.

3. Calculer le volume de la sphère.

4. Calculer l'aire de la sphère.

CORRIGÉS

Exercice 1

Partie A : Intégrales de Wallis

Soient I_n et J_n les intégrales définies pour tout entier naturel n tel que :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$$

1. Valeurs de I_0 et de I_1 :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)) = -0 + 1 = 1$$

2. Valeurs de J_0 et de J_1 :

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^1(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$$

3. Valeurs de $J_2 + I_2$ et de $J_2 - I_2$:

$$J_2 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) + \sin^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$J_2 - I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) - \sin^2(x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)dx = \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\sin(\pi) - \frac{1}{2}\sin(0) = 0$$

4. Valeurs de I_2 et de J_2 :

À partir des résultats précédents, on déduit le système de deux équations à deux inconnues I_2 et J_2 :

$$\begin{cases} J_2 + I_2 = \dfrac{\pi}{2} \\ J_2 - I_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2I_2 = \dfrac{\pi}{2} \\ J_2 = I_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_2 = \dfrac{\pi}{4} \\ J_2 = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

5. $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, en effet :

Pour tout réel x, on a : $0 \leq \sin(x) \leq 1$

Puis en élevant à la puissance n : $0^n \leq \sin^n(x) \leq 1^n \Leftrightarrow 0 \leq \sin^n(x) \leq 1$

En intégrant ensuite de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$ et par positivité de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx \leq [x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx \leq \frac{\pi}{2} - 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{2}$$

Le terme général de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est compris entre deux réels, la suite est donc bornée et ainsi convergente.

6. $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, en effet :

Pour tout réel x, on a :

$0 \leq \cos(x) \leq 1$

Puis en élevant à la puissance n :

$$0^n \leq \cos^n(x) \leq 1^n \Leftrightarrow 0 \leq \cos^n(x) \leq 1$$

En intégrant ensuite de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$ et par positivité de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx \leq [x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx \leq \frac{\pi}{2} - 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq J_n \leq \frac{\pi}{2}$$

Le terme général de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est compris entre deux réels, la suite est donc bornée et ainsi convergente.

7. À l'aide d'une intégration par parties, on montre que $J_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} J_n$

$$J_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \times \cos^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(x)) \times \cos^n(x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \times \cos^n(x)\,dx = J_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times \sin(x) \times \cos^n(x)\,dx$$

Pour la seconde intégrale, on effectue une intégration par parties en posant :

$u = \sin(x)$ donc $u' = \cos(x)$ en dérivant

$v' = \sin(x) \times \cos^n(x)$ donc $v = \dfrac{-1}{n+1} \times \cos^{n+1}(x)$

$$J_{n+2} = J_n - \left([u \times v]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u' \times v dx \right)$$

$$J_{n+2} = J_n - \left[\sin(x) \times \frac{-1}{n+1} \times \cos^{n+1}(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \times \frac{-1}{n+1} \times \cos^{n+1}(x)\,dx$$

$$J_{n+2} = J_n - \left(\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \frac{-1}{n+1} \times \cos^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \underbrace{\sin(0) \times \frac{-1}{n+1} \times \cos^{n+1}(0)}_{=0} \right)$$

$$- \frac{1}{n+1} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(x)\,dx}_{J_{n+2}} = J_n - \frac{1}{n+1} J_{n+2}$$

Ainsi :

$$J_{n+2} = J_n - \frac{1}{n+1} J_{n+2}$$

Puis en regroupant les termes :

$$J_{n+2} + \frac{1}{n+1} J_{n+2} = J_n \Leftrightarrow \frac{n+1+1}{n+1} J_{n+2} = J_n \Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1} J_{n+2} = J_n$$

$$\Leftrightarrow J_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} J_n$$

Ce qui est la formule qu'il fallait démontrer.

8. On démontre par récurrence que pour tout $n \geq 2$: $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$

• Initialisation : $n = 2$

$$I_{2+2} = I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\,dx$$

On linéarise $\sin^4(x)$:

$$\sin^4(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{(2i)^4} \times \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^2 \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^2$$

$$= \frac{1}{16i^4} \times \left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right)\left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right)$$

$$= \frac{1}{16} \times \left(e^{4ix} - 2e^{2ix} + 1 - 2e^{2ix} + 4 - 2e^{-2ix} + 1 - 2e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$$

$$= \frac{1}{16} \times \left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$$

$$= \frac{1}{16} \times \left(e^{4ix} + e^{-4ix} - 4\left(e^{-2ix} + e^{-2ix}\right) + 6\right)$$

$$= \frac{1}{16} \times \left(2 \times \frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} - 8 \times \frac{e^{-2ix} + e^{-2ix}}{2} + 6\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6\right) = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$$

$$I_{2+2} = I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$$

$$= \left[\frac{1}{32}\sin(4x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{32}\sin(2\pi) - \frac{1}{4}\sin(\pi) + \frac{3}{8}\times\frac{\pi}{2} - \frac{1}{32}\sin(0) + \frac{1}{4}\sin(0) - \frac{3}{8}\times 0$$

$$= \frac{1}{32}\times 0 - \frac{1}{4}\times 0 + \frac{3\pi}{16} - \frac{1}{32}\times 0 + \frac{1}{4}\times 0 - 0 = \frac{3\pi}{16}$$

$I_2 = \frac{\pi}{4}$ d'après la question **4**.

$$I_{2+2} = I_4 = \frac{3\pi}{16} = \frac{3}{4}\times\frac{\pi}{4} = \frac{2+1}{3+1}\times I_2$$

Donc la propriété est vraie au rang $n = 2$ et on a bien :

$$I_{2+2} = \frac{2+1}{3+1}\times I_2$$

9. Hérédité : On suppose que la formule est vraie pour un certain rang k, on démontre qu'elle l'est aussi au rang $k + 1$.

On suppose que :

$$I_{k+2} = \frac{k+1}{k+2}\times I_k$$

On démontre que :

$$I_{k+1+2} = \frac{k+1+1}{k+1+2}\times I_{k+1}$$

Soit :

$$I_{k+3} = \frac{k+2}{k+3}\times I_{k+1}$$

$$I_{k+3} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k+3}(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\times\sin^{k+1}(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(x))\times\sin^{k+1}(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k+1}(x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\times\sin^{k+1}(x)\,dx$$

$$= I_{k+1} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\times\sin^{k+1}(x)\,dx$$

$$= I_{k+1} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\times\cos(x)\times\sin^{k+1}(x)\,dx$$

Pour la seconde intégrale, on effectue une intégration par parties en posant :
$u = \cos(x)$ donc $u' = -\sin(x)$ en dérivant
$v' = \cos(x) \times \sin^{k+1}(x)$ donc $v = \frac{1}{k+2} \times \sin^{k+2}(x)$

$$I_{k+3} = I_{k+1} - \left([u \times v]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u' \times v dx \right)$$

$$= I_{k+1} - \left[\cos(x) \times \frac{1}{k+2} \times \sin^{k+2}(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin(x)) \times \frac{1}{k+2} \times \sin^{k+2}(x) dx$$

$$= I_{k+1} - \left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \frac{1}{k+2} \times \sin^{k+2}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \underbrace{\cos(0) \times \frac{1}{k+2} \times \sin^{k+2}(0)}_{=0} \right)$$

$$+ \frac{1}{k+2} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k+3}(x) dx}_{I_{k+3}} = I_{k+1} - \frac{1}{k+2} I_{k+3}$$

Ainsi :

$$I_{k+3} = I_{k+1} - \frac{1}{k+2} I_{k+3}$$

Puis en regroupant les termes :

$$I_{k+3} + \frac{1}{k+2} I_{k+3} = I_{k+1} \Leftrightarrow \frac{k+2+1}{k+2} I_{k+3} = I_{k+1} \Leftrightarrow \frac{k+3}{k+2} I_{k+3} = I_{k+1}$$

$$\Leftrightarrow I_{k+3} = \frac{k+2}{k+3} I_{k+1}$$

Ce qui est la formule au rang $k + 1$.

10. Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 2$:

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

Partie B : Intégrales de Gauss

1. Soit T une variable aléatoire de loi normale centrée réduite N(0 ; 1)
• Expression de la fonction de densité de T :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

• Propriétés d'une fonction de densité

– f est continue

– f est positive : $f(t) \geq 0$ pour tout x réel

– L'aire délimitée par la courbe représentative de f et l'axe des abscisses est égale à 1, ce qui se traduit par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

•

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

en appliquant la troisième propriété d'une fonction de densité.

2. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ est paire, en effet :

$$f(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(-t)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} = f(t)$$

Donc la fonction f est paire.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt}_{J}$$

Donc :

$$J = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt}_{=1 \text{ d'après la question précédente}} - \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt}_{=J \text{ par parité de } f}$$

On déduit :

$$J = 1 - J \Leftrightarrow 2J = 1$$

Et finalement :

$$J = \frac{1}{2}$$

SUJET ORIGINAL MATHÉMATIQUES

Rappel : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors :

f	f **paire**	f **impaire**
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$	$2\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ ou $2\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$	0

3. En multipliant et en divisant par $\sqrt{2\pi}$, on obtient :

$$K = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2\pi} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

4. On effectue le changement de variable suivant :

$$x = \frac{t}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow t = \sqrt{2}x$$

Ainsi :

$$dt = \sqrt{2}dx$$

Bornes :

Quand $x = 0,\ t = \sqrt{2} \times 0 = 0$

Quand x tend vers $+\infty$, il en est de même pour t, ainsi :

$$K = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \times \sqrt{2}dx = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{2}G$$

Soit :

$$K = \sqrt{2}G \Leftrightarrow G = \frac{1}{\sqrt{2}}K$$

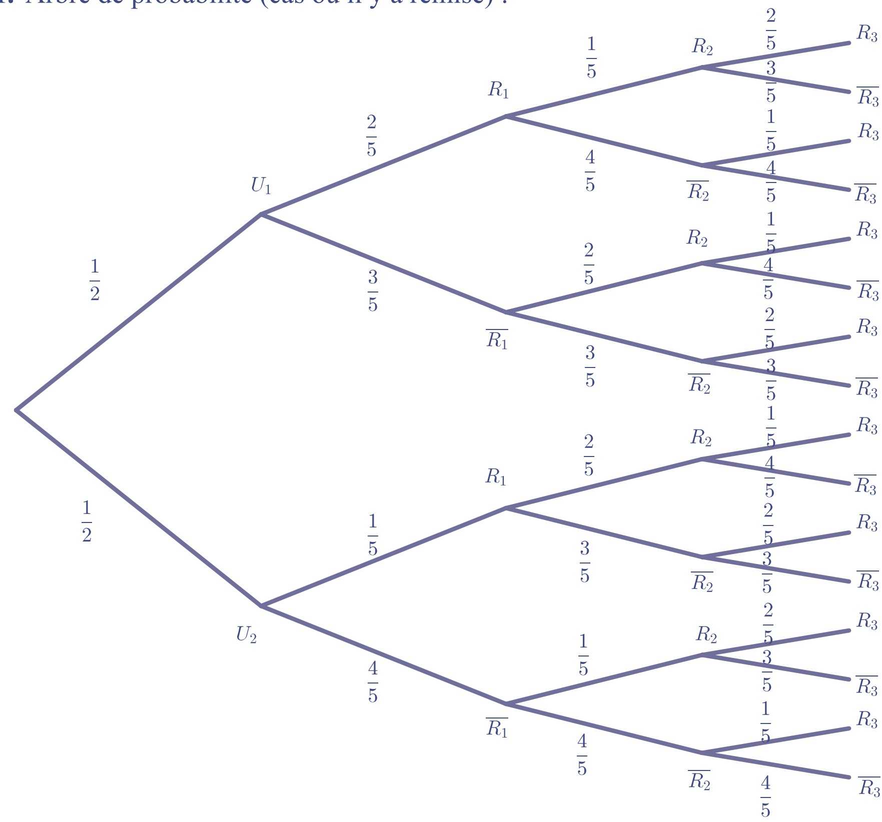
Et finalement :

$$G = \frac{1}{\sqrt{2}}K = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 2

Partie A : Tirages successifs avec remise

1. Arbre de probabilité (cas où il y a remise) :



2. Loi de probabilité de X :

$X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2\}$

$$P(X=0) = P\left(U_1 \cap \overline{R_1} \cap \overline{R_2}\right) + P\left(U_2 \cap \overline{R_1} \cap \overline{R_2}\right)$$

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{9}{50} + \frac{16}{50} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=1) = P\left(U_1 \cap R_1 \cap \overline{R_2}\right) + P\left(U_1 \cap \overline{R_1} \cap R_2\right) + P\left(U_2 \cap R_1 \cap \overline{R_2}\right) + P\left(U_2 \cap \overline{R_1} \cap R_2\right)$$

$$P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{8}{50} + \frac{6}{50} + \frac{3}{50} + \frac{4}{50} = \frac{21}{50}$$

$$P(X=2) = P(U_1 \cap R_1 \cap R_2) + P(U_2 \cap R_1 \cap R_2)$$

$$P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{50} + \frac{2}{50} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$$

Ainsi la loi de probabilité de X est donnée par :

X	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}=\frac{25}{50}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{2}{25}=\frac{4}{50}$

3. Espérance de X :

$$E(X)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)$$

$$E(X)=0\times\frac{25}{50}+1\times\frac{21}{50}+2\times\frac{4}{50}=0+\frac{21}{50}+\frac{8}{50}=\frac{29}{50}$$

4. Calcul de p_1 et p_2 où p_1 est la probabilité que la i-ème boule soit rouge :

$$p_1=P(A_1)=P(\text{la première boule tirée est rouge})$$

$$p_1=P(U_1\cap R_1)+P(U_2\cap R_1)$$

$$p_1=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$$

$$p_2=P(A_2)=P(\text{la deuxième boule tirée est rouge})$$

$$p_2=P(U_1\cap R_1\cap R_2)+P(U_1\cap B_1\cap R_2)+P(U_1\cap R_1\cap R_2)+P(U_2\cap B_1\cap R_2)$$

$$p_2=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{50}+\frac{6}{50}+\frac{2}{50}+\frac{4}{50}=\frac{14}{50}=\frac{7}{25}$$

5. $p_3=P(A_3)=P(\text{la troisième boule tirée est rouge})$

$$p_3=P(U_1\cap R_1\cap R_2\cap R_3)+P(U_1\cap R_1\cap B_2\cap R_3)+P(U_1\cap B_1\cap R_2\cap R_3)$$
$$+P(U_1\cap B_1\cap B_2\cap R_3)+P(U_2\cap R_1\cap R_2\cap R_3)+P(U_1\cap R_1\cap B_2\cap R_3)$$
$$+P(U_1\cap B_1\cap R_2\cap R_3)+P(U_1\cap B_1\cap B_2\cap R_3)$$

$$p_3=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$$
$$+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}$$

$$p_3=\frac{2}{125}+\frac{4}{125}+\frac{3}{125}+\frac{9}{125}+\frac{1}{125}+\frac{3}{125}+\frac{4}{125}+\frac{8}{125}=\frac{34}{125}$$

Partie B : Étude d'une suite

1. $u_{n+1} = au_n + b$

En utilisant les valeurs de p_1, p_2 et p_3, on obtient un système de deux équations à deux inconnues a et b :

$$\begin{cases} p_2 = ap_1 + b \\ p_3 = ap_2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{25} = a \times \dfrac{3}{10} + b \\ \dfrac{34}{125} = a \times \dfrac{7}{25} + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{25} = \dfrac{3}{10}a + b \\ \dfrac{34}{125} = \dfrac{7}{25}a + b \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations, on obtient :

$$\frac{7}{25} - \frac{34}{125} = \frac{3}{10}a + b - \left(\frac{7}{25}a + b\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{25} - \frac{34}{125} = \frac{3}{10}a - \frac{7}{25}a + b - b$$

$$\Leftrightarrow \frac{35}{125} - \frac{34}{125} = \frac{15}{50}a - \frac{14}{50}a$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{125} = \frac{1}{50}a$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\frac{1}{125}}{\frac{1}{50}}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{125} \times \frac{50}{1} = \frac{1}{25 \times 5} \times \frac{25 \times 2}{1} = \frac{2}{5}$$

Puis en remplaçant a par sa valeur dans l'une ou l'autre des équations, on obtient la valeur de b, par exemple, avec la première équation :

$$\frac{7}{25} = \frac{3}{10}a + b \Leftrightarrow b = \frac{7}{25} - \frac{3}{10}a$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{7}{25} - \frac{3}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{7}{25} - \frac{6}{50} = \frac{14}{50} - \frac{6}{50} = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$$

Finalement :

$$\begin{cases} a = \dfrac{2}{5} \\ b = \dfrac{4}{25} \end{cases}$$

Ainsi la suite u_n a pour terme général pour tout n ≥ 1 :

$$u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{4}{25}$$

1. Soit $v_n = p_n - \frac{4}{15}$

- $v_1 = p_1 - \frac{4}{15} = \frac{3}{10} - \frac{4}{15} = \frac{9}{30} - \frac{8}{30} = \frac{1}{30}$
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, en effet : $v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{4}{15}$ au rang $n+1$

$v_{n+1} = au_n + b - \frac{4}{15}$ en remplaçant p_{n+1} par son expression

$v_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{4}{25} - \frac{4}{15}$ en remplaçant a et b par leur valeur

$v_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{36}{225} - \frac{60}{225}$ en réduisant au même dénominateur

$v_{n+1} = \frac{2}{5}p_n - \frac{24}{225}$ après calculs

$v_{n+1} = \frac{2}{5}p_n - \frac{8}{75}$ après calculs

$v_{n+1} = \frac{2}{5}\left(p_n - \frac{\frac{8}{75}}{\frac{2}{5}}\right)$ en factorisant par $\frac{14}{5}$

$v_{n+1} = \frac{2}{5}\left(p_n - \frac{8}{75} \times \frac{5}{2}\right)$ car $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

$v_{n+1} = \frac{2}{5}\left(p_n - \frac{4 \times 2}{5 \times 15} \times \frac{5}{2}\right)$

$v_{n+1} = \frac{2}{5}\left(p_n - \frac{4}{15}\right)$

$v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n$ en reconnaissant l'expression de v_n

Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = a = \frac{2}{5}$ et de premier terme $v_1 = \frac{1}{30}$

2. En appliquant la formule d'une suite géométrique $v_n = v_0 \times q^n$, on a :

$$v_n = \frac{1}{30} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

Puis :

$$v_n = u_n - \frac{4}{15} \Leftrightarrow u_n = v_n + \frac{4}{15} = \frac{1}{30} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{4}{15}$$

Et finalement :

$$u_n = \frac{1}{30} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{4}{15}$$

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente car elle est à la fois décroissante et minorée. En effet, elle est bien décroissante car la différence entre deux de ces termes consécutifs est négative :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{30} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n} + \frac{4}{15} - \left(\frac{1}{30} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{4}{15}\right)$$

$$= \frac{1}{30} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n} - \frac{1}{30} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{4}{15} - \frac{4}{15}$$

$$= \frac{1}{30} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n} - \frac{1}{30} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{30} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \times \left(\frac{2}{5} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{30} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{1}{50} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} < 0$$

Ainsi pour tout $n \geq 1$, la suite $(\mathrm{u_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
Elle est également minorée :

$$u_n = \frac{1}{30} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{4}{15} > 0 \; \forall n \geq 1$$

Étant décroissante et minorée, la suite $(\mathrm{u_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

4. Limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

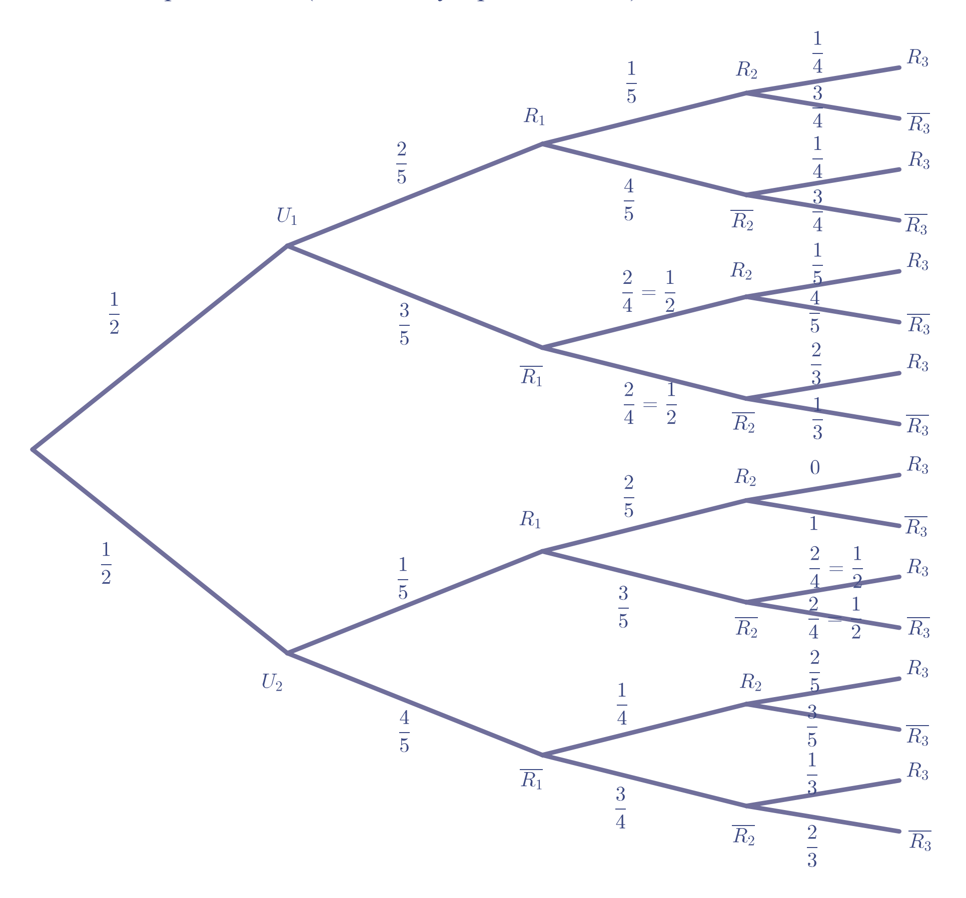
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{30} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{4}{15} = \frac{1}{30} \times 0 + \frac{4}{15} = \frac{4}{15}$$

En effet : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$ car $\frac{2}{5}$ est compris entre – 1 et 1 et donc $\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc vers $\frac{4}{15}$.

5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant convergente vers un nombre compris entre 0 et 1, le modèle convient au problème. On en déduit que la probabilité que la boule soit rouge au $n^{\text{ième}}$ tirage lorsque n est très grand se rapproche de $\frac{4}{15}$.

Partie C : Tirages successifs sans remise

1. Arbre de probabilités (cas où il n'y a pas de remise) :



2. Loi de probabilité de X :

$X(\Omega) = \{0 \,;\, 1 \,;\, 2\}$

$$P(X=0) = P\left(U_1 \cap \overline{R_1} \cap \overline{R_2}\right) + P\left(U_2 \cap \overline{R_1} \cap \overline{R_2}\right)$$

$$P(X=0) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4} = \frac{3}{20} + \frac{12}{40} = \frac{3}{20} + \frac{6}{20} = \frac{9}{20}$$

$$P(X=1) = P\left(U_1 \cap R_1 \cap \overline{R_2}\right) + P\left(U_1 \cap \overline{R_1} \cap R_2\right) + P\left(U_2 \cap R_1 \cap \overline{R_2}\right)$$
$$+ P\left(U_2 \cap \overline{R_1} \cap R_2\right)$$

$$P(X=1) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{8}{50} + \frac{3}{20} + \frac{3}{50} + \frac{4}{40}$$
$$= \frac{11}{50} + \frac{3}{20} + \frac{2}{20} = \frac{11}{50} + \frac{5}{20} = \frac{22}{100} + \frac{25}{100} = \frac{47}{100}$$

$$P(X=2)=P(U_1\cap R_1\cap R_1)+P(U_2\cap R_1\cap R_2)$$

$$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{50}+\frac{2}{50}=\frac{4}{50}=\frac{2}{25}$$

Ainsi la loi de probabilité de X est donnée par :

X	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{9}{20}=\frac{45}{100}$	$\frac{47}{100}$	$\frac{2}{25}=\frac{8}{100}$

3. Espérance de X :

$$E(X)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)$$

$$E(X)=0\times\frac{45}{100}+1\times\frac{47}{100}+2\times\frac{8}{100}=0+\frac{47}{100}+\frac{16}{100}=\frac{63}{100}$$

Calcul de p_1 et p_2 :

$$p_1=P(A_1)=P(\text{la première boule tirée est rouge})$$

$$p_1=P(U_1\cap R_1)+P(U_2\cap R_1)$$

$$p_1=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$$

$$p_2=P(A_2)=P(\text{la deuxième boule tirée est rouge})$$

$$p_2=P(U_1\cap R_1\cap R_2)+P(U_1\cap B_1\cap R_2)+P(U_1\cap R_1\cap R_2)+P(U_2\cap B_1\cap R_2)$$

$$p_2=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{50}+\frac{3}{20}+\frac{2}{50}+\frac{4}{40}$$

$$=\frac{1}{25}+\frac{3}{20}+\frac{1}{25}+\frac{1}{10}=\frac{2}{25}+\frac{3}{20}+\frac{2}{20}=\frac{2}{25}+\frac{5}{20}=\frac{8}{100}+\frac{25}{100}=\frac{33}{100}$$

4. $p_3=P(A_3)=P(\text{la troisième boule tirée est rouge})$

$$p_3=P(U_1\cap R_1\cap R_2\cap R_3)+P(U_1\cap R_1\cap B_2\cap R_3)+P(U_1\cap B_1\cap R_2\cap R_3)$$
$$+P(U_1\cap B_1\cap B_2\cap R_3)+P(U_2\cap R_1\cap R_2\cap R_3)+P(U_1\cap R_1\cap B_2\cap R_3)$$
$$+P(U_1\cap B_1\cap R_2\cap R_3)+P(U_1\cap B_1\cap B_2\cap R_3)$$

$$p_3=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}$$
$$\times 0+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$$

$$p_3=\frac{1}{100}+\frac{1}{25}+\frac{3}{100}+\frac{1}{10}+0+\frac{3}{100}+\frac{1}{25}+\frac{1}{10}=\frac{7}{100}+\frac{2}{25}+\frac{2}{10}$$
$$=\frac{7}{100}+\frac{8}{100}+\frac{20}{100}=\frac{35}{100}$$

Exercice 3

1. Coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$:

A(0 ; 0 ; 0)
B(1 ; 0 ; 0)
C(0 ; 1 ; 0)
D(0 ; 0 ; 1)
E(1 ; 0 ; 1)
F(1 ; 1 ; 0)
G(1 ; 1 ; 1)
H(0 ; 1 ; 1)

2. Coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{AG}$:

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1-0\\0-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BG}=\begin{pmatrix}1-1\\1-0\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AG}=\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

3. Norme des vecteurs précédents :

$\overrightarrow{AB}=\sqrt{1^2+0^2+0^2}=\sqrt{1}=1$ unité de longueur
$\overrightarrow{BG}=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$ unité de longueur
$\overrightarrow{AG}=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$ unité de longueur

4. Nature du triangle ABG :

$\overrightarrow{BG}\bullet\overrightarrow{AG}=0\times1+1\times1+1\times1=2$

$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AG}=1\times1+0\times1+0\times1=1$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BG} = 1\times 0 + 0\times 1 + 0\times 1 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont orthogonaux.

Ainsi le triangle ABG est rectangle en B.

➠ **Remarque :** Vous pouviez également utiliser la réciproque du théorème de Pythagore :

$AG^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$

$AB^2 + BG^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2 = 3$

$AG^2 = AB^2 + BG^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABG est rectangle en B.

5. Pour déterminer $\cos\left(\widehat{BAG}\right)$, on considère une autre expression du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AG} \times \cos\left(\widehat{BAG}\right)$$

Puis on isole $\cos\left(\widehat{BAG}\right)$:

$$\cos\left(\widehat{BAG}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AG}} = \frac{1}{1\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

➠ **Remarque :** Vous pouviez également utiliser la formule du cosinus dans le triangle rectangle :

$$\cos\left(\widehat{BAG}\right) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

6. Aire du triangle ABG :

Le triangle ABG est rectangle en B ((AB) $\perp$ (BG)) donc son aire est égale au produit :

$$A = \frac{AB \times BG}{2} = \frac{1\times\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ unité d'aire}$$

Partie B : Étude d'un plan

1. Équation cartésienne du plan (ABG) :

Les points A, B et G appartiennent au plan (ABG), donc leurs coordonnées vérifient ses équations cartésiennes de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

où a, b, c et d sont solutions du système de trois équations à quatre inconnues :

$$\begin{cases} a\times 0+b\times 0+c\times 0+d=0 \\ a\times 1+b\times 0+c\times 0+d=0 \\ a\times 1+b\times 1+c\times 1+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ a+d=0 \\ a+b+c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ a=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ a=0 \\ c=-b \end{cases}$$

Les équations cartésiennes du plan (ABG) sont de la forme :

$$0x+by-bz+0=0 \Leftrightarrow by-bz=0$$

En optant pour $b=1$, on obtient qu'une équation cartésienne du plan (ABG) :

$$y-z=0$$

2. Un vecteur normal au plan (ABG) est donné par :

$$\vec{n}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Rappel : Si un plan (P) a pour équation $ax+by+cz+d=0$ alors un vecteur normal à ce plan a pour coordonnées :

$$\vec{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Partie C : Étude d'une sphère

1. Coordonnées du centre de la sphère circonscrite au cube de la partie A :

La sphère a pour centre le centre du cube ABEDHCFG, c'est-à-dire le milieu I du segment [AG] :

$$x_{\mathrm{I}}=\frac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{G}}}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$y_{\mathrm{I}}=\frac{y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{G}}}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$z_{\mathrm{I}}=\frac{z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{G}}}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$$

Ainsi le centre de la sphère a pour coordonnées :

$$\mathrm{I}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

2. Rayon de la sphère :

Le rayon R de la sphère est égal à la longueur AI où $\mathrm{AI}=\frac{1}{2}\mathrm{AG}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ unité de longueur. Ainsi :

$$R=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ unité de longueur}$$

3. Volume de la sphère :

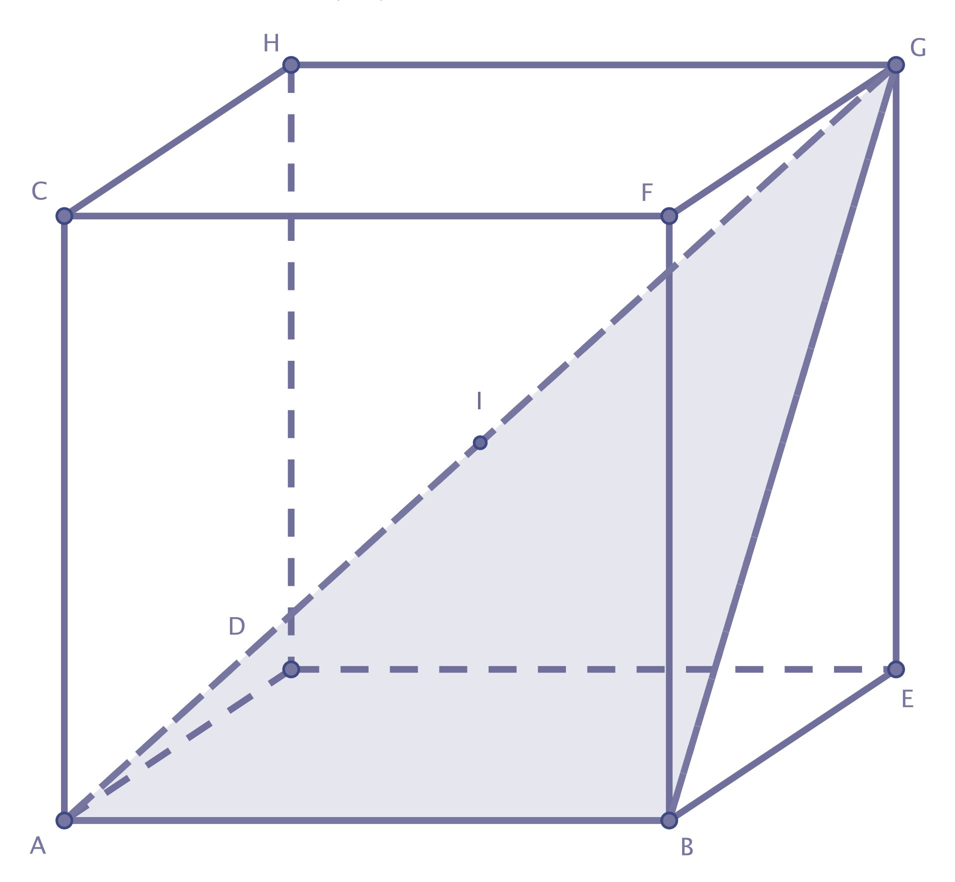
Le volume de la sphère est égal à $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ où $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ unité de longueur

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{8} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \text{ unités de volume}$$

4. Aire de la sphère :

L'aire de la sphère est égale à $A = 4\pi R^2$ où $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ unité de longueur

$$A = 4\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4\pi \times \frac{3}{4} = 3\pi \text{ unités d'aire}$$



PHYSIQUE-CHIMIE

Exercice I (13 points)

L'éthylamine, ou éthanamine, est un intermédiaire de synthèse de formule brute C_2H_7N, très utilisé par l'industrie dans l'élaboration de nombreux produits phytosanitaires ou médicaments.

Données :

M(Cl) = 35,5 g.mol^{-1} ; M(O) = 16,0 g.mol^{-1} ; M(N) = 14,0 g.mol^{-1} ; M(C) = 12,0 g.mol^{-1} ; M(H) = 1,0 g.mol^{-1}.

Produit ionique de l'eau : Ke = 10^{-14}

1. Représenter le schéma de Lewis de la molécule d'éthylamine.

En solution dans l'eau, l'éthylamine se comporte comme une base faible de pKa = 10,7.

2. Compléter le diagramme de prédominance en faisant apparaître les espèces majoritaires
3. Écrire la réaction de l'éthylamine sur l'eau.
4. Donner l'expression littérale de la constante d'équilibre de cette réaction puis la calculer à l'aide de Ke.

On se propose de doser un résidu industriel qui peut être considéré comme une solution aqueuse d'éthylamine par une solution calibrée connue d'acide chlorhydrique de concentration $1,0 \times 10^{-1}$ mol.L^{-1}.

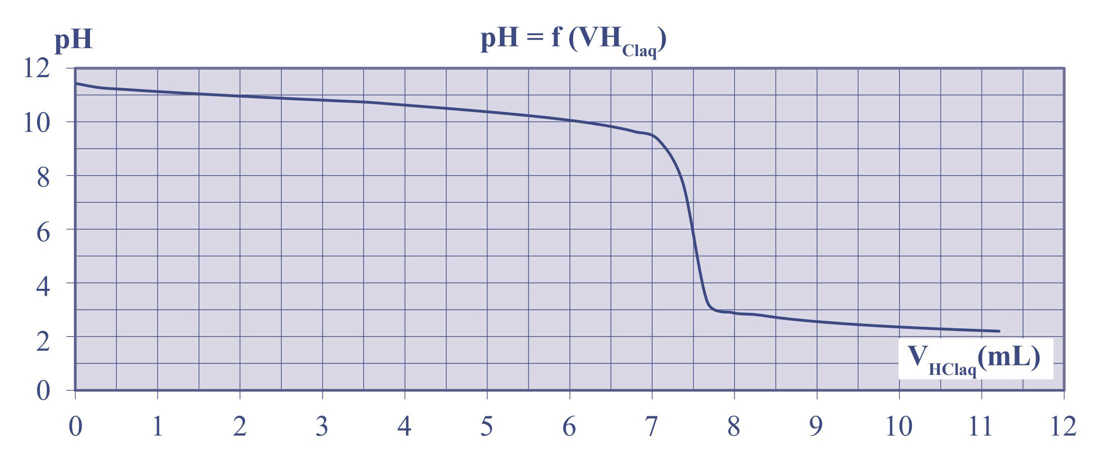
La réaction peut s'écrire sous une forme simplifiée :

$$B + H_3O^+ \rightarrow BH^+ + H_2O \quad \text{avec } B = \text{éthylamine}$$

L'acide chlorhydrique étant un acide fort, la réaction sera considérée comme totale.

L'échantillon à analyser a au départ un pH = 11,6 ; on en prélève une prise d'essai de 25,0 mL, que l'on amène par addition d'eau pure à un volume de 50 mL pour effectuer le dosage.

5. Déterminer le pH de la solution titrante d'acide chlorhydrique.
   Le dosage est suivi par pH-métrie comme le montre le graphique ci-dessous :



6. Déterminer graphiquement le volume équivalent.

7. En déduire la concentration molaire puis la concentration massique de l'éthylamine dans le résidu industriel.

Exercice 2

Au printemps 2021, Thomas Pesquet devrait s'envoler vers la Station Spatiale Internationale. Le lanceur Falcon permet de transporter le cargo, les équipages et du matériel. L'ensemble appelé système possède une masse $m = 500 \times 103$ kg considérée constante ici, pour des raisons de simplification (en réalité, la masse diminue du fait de la combustion du carburant).

Donnée : g = 9,81 m.s^{-2}

Au référentiel terrestre, on associe une base cartésienne $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$, $\vec{j}$ est vertical et dirigé vers le haut. À $t = 0$, le système est en O, et sa vitesse s'écrit : $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{v_0}\,\vec{j}$

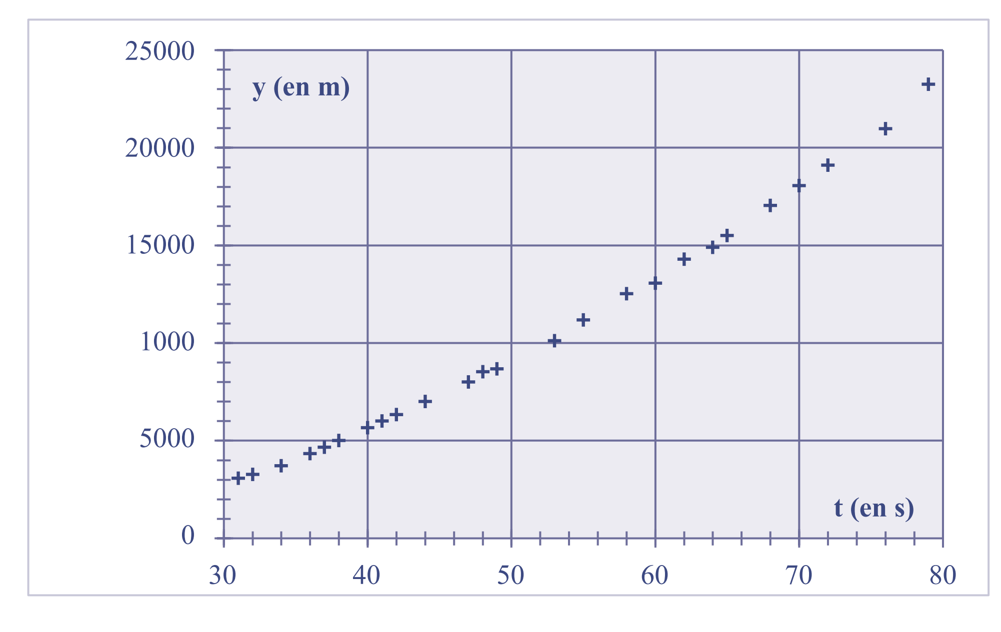
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - Étude entre la 60e et la 79e seconde

On étudie ici le décollage du système entre la 60e et la 79e seconde. Sur cette partie du trajet, le système est soumis à une force de poussée verticale notée $\vec{F}$ et à son poids $\vec{P}$. On néglige les forces de frottements sur cette partie.

1. En appliquant la 2e loi de Newton, exprimer l'accélération $\vec{a}$ du système en fonction de $\vec{F}$ et $\vec{P}$. En déduire les composantes du vecteur accélération dans la base $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$: $\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}$
2. En déduire les expressions des composantes du vecteur vitesse $\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}$ puis de l'altitude y en fonction du temps.

La figure ci-dessous représente l'évolution de l'altitude y (exprimée en m) du système en fonction du temps(exprimé en secondes).



Sur l'intervalle compris entre la 60e et la 79e seconde, on modélise la courbe afin d'en déduire la force depoussée. On utilise cinq modèles différents. Les résultats des modélisations sont les suivants, avec *a, b, c, d, e, f, g, h* des constantes :

(1) $y = 498\ t + a$

(2) $y = -4{,}811\ t^2 + b.t + c$

(3) $y = 3{,}58.\ln(t) + d$

(4) $y = 4{,}291\ t^2 + e.t + f$

(5) $y = 0{,}477\ t^3 - 95\ t^2 + g.t + h$

3. **a.** Choisir parmi les 5 propositions l'expression appropriée.

b. À partir de la modélisation choisie, en déduire la valeur de la force de la poussée F sur cette période.

Partie B – Étude entre la 32e et la 40e seconde

4. **a.** À l'aide d'une méthode graphique, déterminer v_2, la vitesse au temps $t_2 = 40$ s.

b. La vitesse au temps $t_1 = 32$ s, vaut $v_1 = 213$ m.s^{-1}. Déterminer la valeur de l'accélération moyenne entre les temps t_1 et t_2.

5. On remarque une diminution de l'accélération de la fusée avec l'altitude. Parmi les propositions listées ci-dessous, quelles peuvent être la ou les causes possibles pouvant expliquer ce phénomène ?

❐ **a.** La masse de la fusée est plus importante au décollage.

❐ **b.** L'air est moins dense en altitude.

❐ **c.** La force de gravitation décroît avec l'altitude.

❐ **d.** La force de poussée diminue.

Exercice 3

Afin de préparer du thé, on remplit d'eau bouillante une tasse munie d'un couvercle, tous deux en céramique.

On nomme S le système constitué de la tasse, de son couvercle et de l'eau. La température du système S s'homogénéise rapidement pour atteindre la température d'équilibre $\theta_0 = 83{,}5$ °C. La température ambiante vaut $\theta_{amb} = 21{,}3$ °C. La tasse est posée sur une table en verre, et des échanges thermiques du système S avec l'air ambiant se font par la face latérale et le couvercle de la tasse. Le flux thermique à travers la face inférieure de la tasse est négligé, tout comme les transferts thermiques autres que convectifs. On ne tiendra pas compte non plus de la présence des feuilles de thé, ni de la très faible quantité d'air contenue dans la tasse.

On s'intéresse au refroidissement du système S au cours du temps. Sa température à l'instant t est notée θ(t). L'origine du temps (t = 0) est fixée à l'instant où le système S atteint l'équilibre thermique : $\theta(t = 0) = \theta_0 = 83{,}5$ °C.

L'équation différentielle vérifiée par θ(t) s'écrit alors :

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} \times (\theta_{amb} - \theta(t)) \quad \text{(équation 1)}$$

1. Quelle est l'unité de τ ?

❐ **a.** $(°\text{C})^{-1}$

❐ **b.** $\text{s.}(°\text{C})^{-1}$

❐ **c.** s.°C

❒ **d.** °C.s^{-1}

❒ **e.** s^{-1}

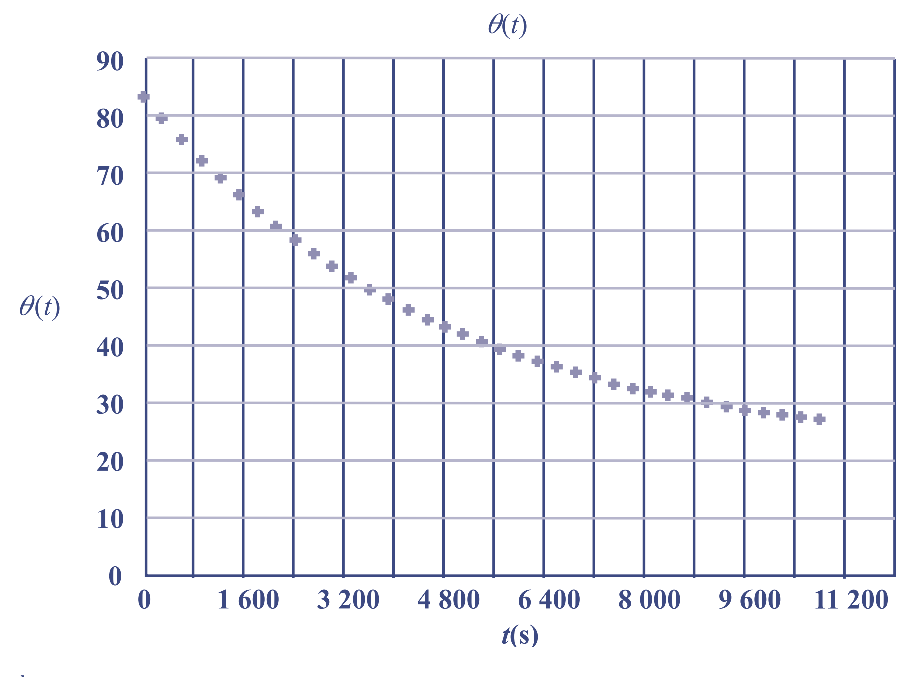
❒ **f.** s

❒ **g.** pas d'unité

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme $\theta(t) = A \times e^{-t/\tau} + B$ où A et B sont des constantes. Déterminer l'expression des constantes A et B en fonction des données du problème.

3. Exprimer l'instant t_1 auquel la température du système S atteint la valeur $\theta_1 = 50,0$ °C en fonction de A, B, τ et θ_1 qui permet de commencer à boire sans se brûler. Calculer la valeur t_1 en prenant la valeur théorique $\tau = 4,66 \times 10^3$ USI.

Le relevé expérimental de l'évolution de la température du système S est disponible ci-dessous.



4. À l'aide de la méthode des 63 % ou celle de la tangente, déterminer graphiquement la valeur de la constante τ_{exp} en indiquant sur la courbe les éléments de construction graphique utilisés.

5. La valeur de la constante τ_{exp} est plus faible que celle théorique. Parmi les propositions listées ci-après, quelles peuvent être la ou les causes possibles d'un tel écart ?

❒ **a.** Le flux thermique à travers la paroi inférieure de la tasse a été négligé dans le modèle théorique.

❒ **b.** Au cours du temps, la température ambiante a légèrement augmenté du fait de la présence du système.

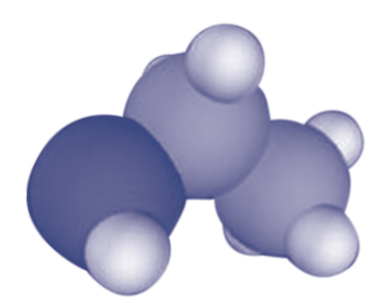
❒ **c.** Il y a des incertitudes sur la mesure de la température du système.

❒ **d.** Le couvercle n'est pas étanche dans la réalité.

CORRIGÉ

Exercice 1

1. Représentations de la molécule d'éthylamine :



Modèle compact de la molécule.

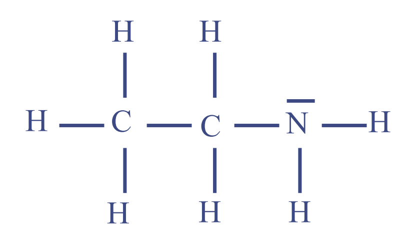


Schéma de Lewis de la molécule.

2. Diagramme de prédominance faisant apparaître les espèces majoritaires :



3. Équation de la réaction de l'éthylamine sur l'eau :

$$CH_3CH_2NH_2 + H_2O \rightleftharpoons CH_3CH_2NH_3^+(aq) + HO^-(aq)$$

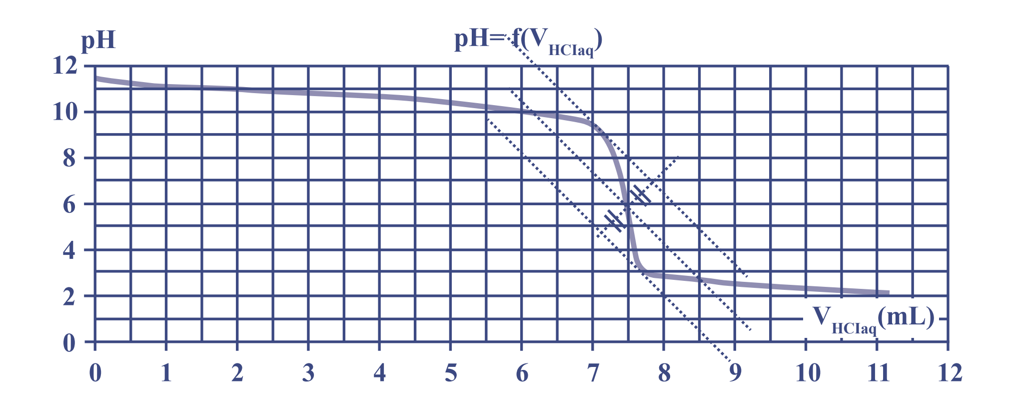
4. L'expression littérale de la constante d'équilibre de cette réaction est :

$$K(T) = \frac{\left[CH_3CH_2NH_3^+\right]_{eq} . \left[HO^-\right]_{eq}}{\left[CH_3CH_2NH_2\right]_{eq}} = \frac{\left[CH_3CH_2NH_3^+\right]_{eq} .Ke}{\left[CH_3CH_2NH_2\right]_{eq} . \left[H_3O^+\right]} = \frac{Ke}{K_A}$$

Sa valeur est $K(T) = \frac{Ke}{K_A} = \frac{10^{-14}}{10^{-10,7}} = 10^{-3,3} = 5,01.10^{-4}$

5. L'acide chlorhydrique est un acide fort, donc $-pH = -\log C = -\log(1,0.10^{-1}) = 1$.

6. On détermine le volume équivalent en utilisant la méthode des tangentes : sa valeur est Véq = 7,5 mL.



La concentration molaire résiduelle de l'éthylamine que l'on notera *C'* est déduite à partir de la relation à l'équivalence :

$$C' \times V_A = C \times V_{eq} \Leftrightarrow C' = \frac{C \times V_{eq}}{V_A} = \frac{1,0.10^{-1} \times 7,5}{25,0} = 3,0.10^{-2}\,\text{mol / L}$$

la concentration massique de l'éthylamine dans le résidu est :

$$C'_m = C' \times M = 3,0.10^{-2} \times (12 \times 2 + 14 + 7) = 1,4\ \text{g / L}$$

Exercice 2

Partie A – Étude entre la 60e et la 79e seconde

1. Le système est défini par l'ensemble {cargo, équipage et matériel} est soumis à deux forces $\vec{F}$ et $\vec{P}$. Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen. Nous pouvons donc appliquer la seconde loi de Newton : $\sum_{systeme} \vec{F} = m_{systeme} \times \vec{a}_G$ soit :

   $\vec{P} + \vec{F} = m_{systeme} \times \vec{a}_G$ et donc $\vec{a}_G = \dfrac{\vec{P} + \vec{F}}{m}$. Les forces de frottements sont négligées.

2. Projetons cette relation vectorielle dans la base $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$:

   - $a_x = 0$
   - $a_y = \dfrac{F - P}{m}$

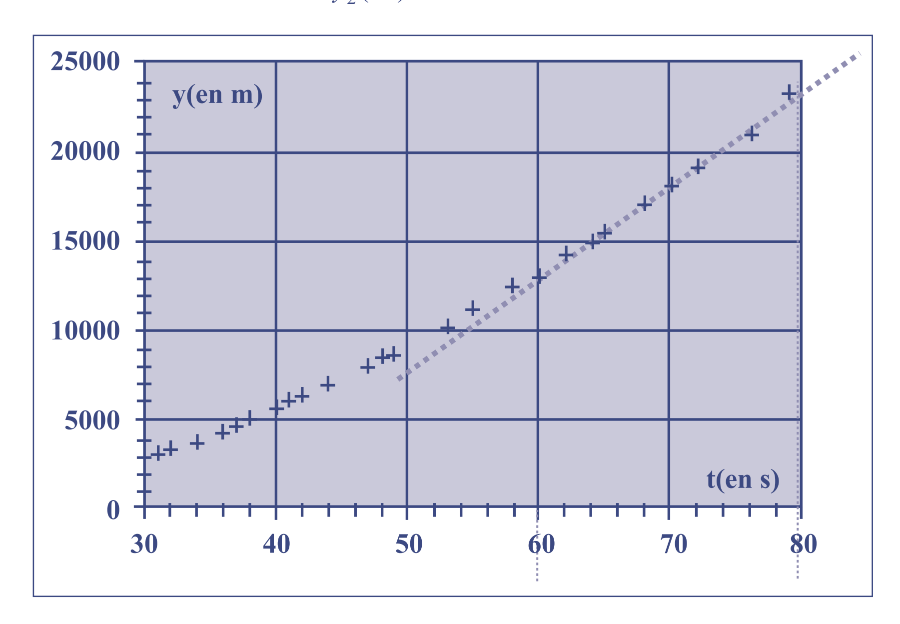
   En intégrant ces deux relations, on trouve :

   - $v_x = v_{0x} = 0$
   - $v_y = \dfrac{F - P}{m}.t + v_{0y} = \dfrac{F - P}{m}.t + v_0$

En intégrant de nouveau :

- $x = 0$
- $y = \frac{F - P}{2m}.t^2 + v_0.t$

3. a. Entre les dates $t_1 = 60$ s et $t_2 = 79$ s la représentation graphique de y(t) est une portion de droite. Seule l'équation (1) convient, dans ce cas l'accélération est nulle. $y(t) = 498\ t + a$. $y_2(60) = 498 \times 60 + a = 13\ 000$ soit $a = -16\ 880$. Vérifions avec $t = 79$ s. $y_2(79) = 498 \times 70 - 16\ 880 = 18\ 000$



b. $F = P = m \times g = 500.10^3 \times 9{,}81 = 4{,}91.10^6\ N$

Partie B - Étude entre la 32e et la 40e seconde

1. a. À l'aide d'une méthode graphique, déterminer v_2, la vitesse au temps $t_2 = 40$ s. Pour cela, je trace la tangente à cette date, et trouve le coefficient directeur de cette droite : $v_2 = \frac{18\ 000 - 2500}{80 - 30} = 310\ \text{m/s}$

b. La vitesse au temps $t_1 = 32$ s, vaut $v_1 = 213$ m.s^{-1}. Déterminer la valeur de l'accélération moyenne entre les temps t_1 et t_2.

$a_{t1-t2} = \frac{517 - 213}{40 - 32} = 38\ \text{m/s}^2$

2. La force de poussée diminue.

Exercice 3

1. Faisons une analyse dimensionnelle : $\left[\frac{d\theta}{dt}\right] = T^{-1} = \frac{1}{\tau}(\theta_{amb} - \theta(t)) \Leftrightarrow [\tau] = T$, donc l'unité de τ est la seconde.

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme $\theta(t) = \mathrm{A} \times e^{-\tau} + \mathrm{B}$ où A et B sont des constantes. Déterminer l'expression des constantes A et B en fonction des données du problème. Utilisons les conditions initiales :

- $\theta(0) = 83{,}5°$ C donc $\mathrm{A}.exp(0) + \mathrm{B} = 83{,}5 \Leftrightarrow \mathrm{A} + \mathrm{B} = 83{,}5$
- $\theta_{finale} = \theta_{amb} = 21{,}3$°C donc $\mathrm{A}.exp(\infty) + \mathrm{B} = 21{,}3 \Leftrightarrow \mathrm{B} = 21{,}3$

Soit : A = 62,2 et B = 21,3 et donc $\theta(t) = 62{,}2.exp(-\frac{t}{\tau}) + 21{,}3$

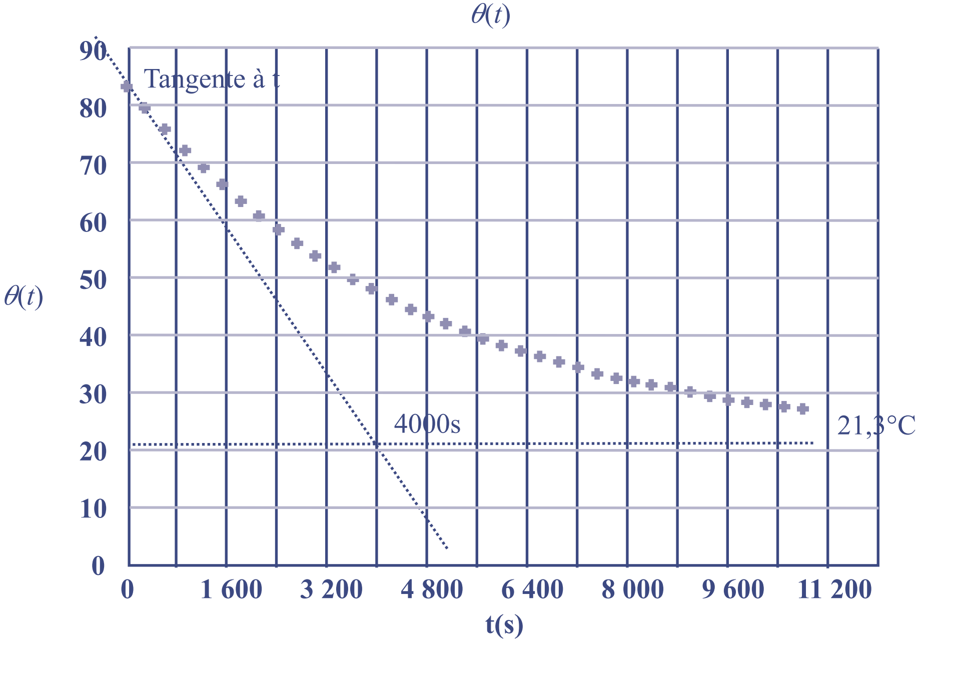
3. Il faut résoudre l'équation différentielle : $\theta(t_1) = 62{,}2.exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + 21{,}3 = \theta_1$

$$t_1 = -\tau.Ln\left(\frac{\theta_1 - 21{,}3}{62{,}2}\right)$$

Calculer la valeur t_1 en prenant la valeur théorique $\tau = 4{,}66 \times 103$ USI.

$$t_1 = -4{,}66.10^3.Ln(\frac{50 - 21{,}3}{62{,}2}) = 3\ 604\ \text{ s} \approx 1\ \text{ h}$$

4. .



Méthode des 63 % :

Lorsque t = τ, alors $\theta(\tau) = A.exp(-1) + B = 62,2 \times 0,37 + 21,3 = 44,3^{o}C$, dans ce cas, $t = \tau = -4,66.10^{3}.\ln(\frac{44,3 - 21,3}{62,2}) = 4\ 636\ s$ ce qui est cohérent avec le résultat de la tangente.

5. La valeur de la constante τexp est plus faible que celle théorique. Parmi les propositions listées dans le document réponse, quelles peuvent être la ou les causes possibles d'un tel écart ?

- Le flux thermique à travers la paroi intérieure a été négligé.
- Le couvercle n'est pas étanche.

Sujet original

PHYSIQUE-CHIMIE

Exercice 1

Détermination de la hauteur de glace avec une chaîne de capteurs de température.

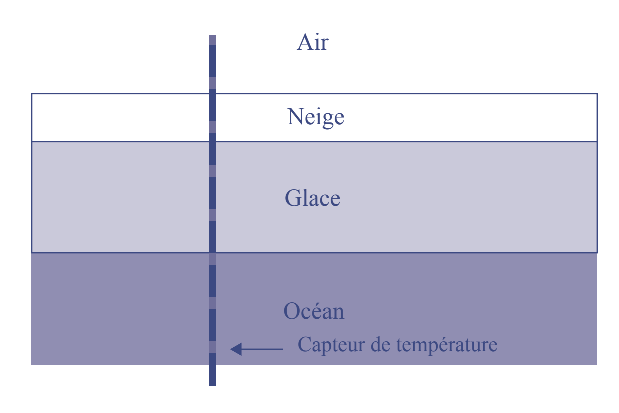
Le changement climatique est une véritable menace pour l'humanité. C'est une réalité qui se traduit par des inondations dans certains endroits du globe, des déserts qui s'agrandissent dans d'autres. Une réalité étudiée année après année par de nombreux scientifiques, dont les travaux ont été analysés et regroupés par le Groupe d'experts intergouvernemental (GIEC). Cet organisme issu de l'ONU, a pour charge d'évaluer l'état des connaissances sur l'évolution du climat, ses causes et ses impacts.

Cet organisme vient de publier la première un rapport alarmant sur la situation actuelle avec pour prévisions une hausse de la température moyenne de 1,5 °C autour des années 2030.

Dans le cadre de ces recherches, une a été menée au début des années 2006-2007, il s'agit de l'expédition Mosaic. Mosaic, acronyme anglais d'« Observatoire multidisciplinaire dérivant pour l'étude du climat arctique », est une exploration à la fois géniale et audacieuse inspirée de celle de la goélette Fram du Norvégien Fridtjof Nansen en 1893-1896, par la première station dérivante habitée du Russe Ivan Papanine en 1937, et enfin par la goélette Tara de la mission Mosaic - Arctique.

Partie de Tromso, dans le nord de la Norvège, le 20 septembre 2019, « Mosaic est une expédition extraordinaire par son objectif interdisciplinaire, ses sites de mesure quasi inaccessibles et son ampleur, souligne Christine Provost, océanographe au C.N.R.S au laboratoire L'océan. Elle doit rapporter des données cruciales sur l'épaisseur de la banquise, qui nous permettront d'affiner les modèles climatiques du G.I.E.C. » Nous nous intéresserons ici à l'évaluation de l'épaisseur de la banquise.

Pour mesurer la hauteur de glace, on utilise un ensemble de plusieurs capteurs de températures. Ces derniers sont régulièrement espacés. Ils sont fixés sur une tige verticale qui traverse la glace.



Dans un premier temps, on considérera que l'épaisseur de neige est négligeable devant celle de la glace et d'eau.

1. Citer les trois modes de transferts thermiques.

2. La puissance thermique échangée à travers une couche de glace est telle que :

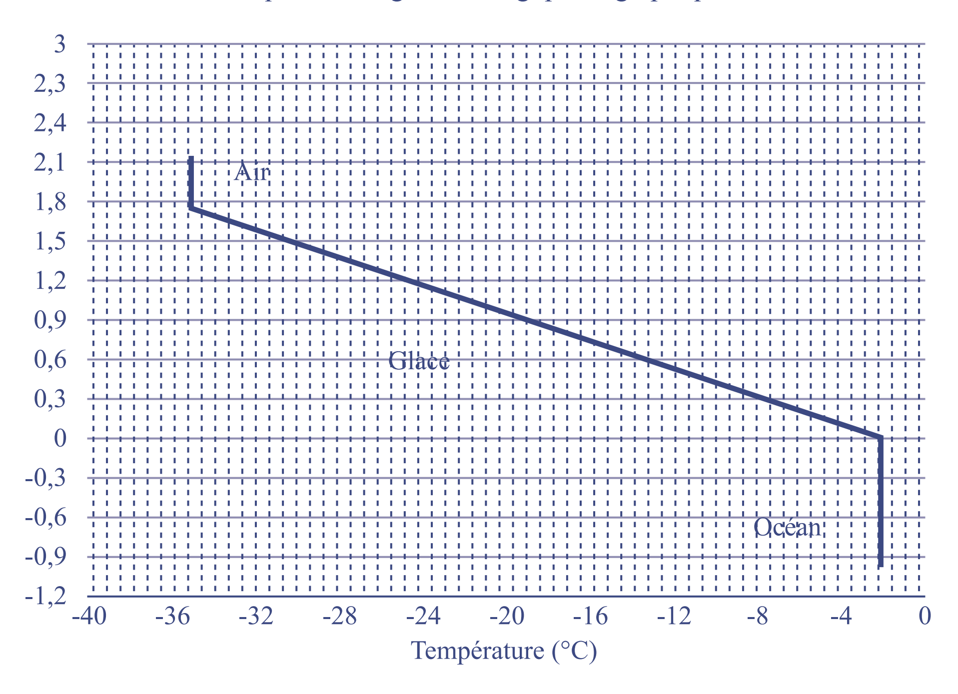
$$P_{thermique} = \frac{\theta_{chaud} - \theta_{froid}}{R_{thermique}}$$

$$\text{avec } R_{thermique} = \frac{e}{\lambda_{glace} \times S}$$

- S : surface (m^2)
- e : épaisseur moyenne de glace (m)
- λ_{glace} : conductivité thermique de la glace
- $R_{thermique}$ ($W.m^2.K^{-1}$)

Donner les unités de la puissance thermique et de la conductivité thermique.

3. Le transfert thermique dans la glace est régi par le graphique suivant :

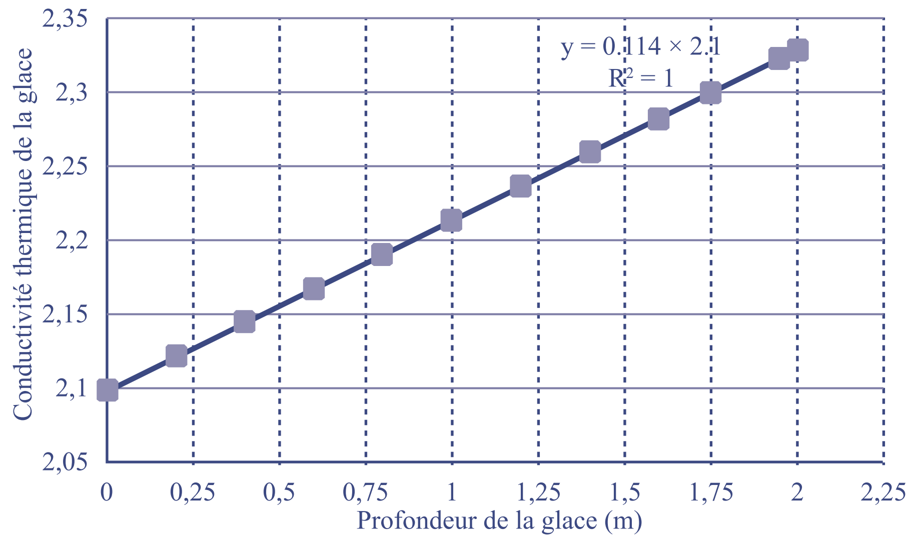


Dans quel sens évolue ce transfert thermique ?

❒ Air → eau
❒ Eau → air

Dans un deuxième temps, nous considérons une banquise de surface égale à 10 m² avec une épaisseur de glace de 1,80 m de glace. Ci-dessous la représentation graphique de la conductivité thermique de la glace en fonction de la profondeur de glace.





4. Calculer la valeur de la résistance thermique R_{Th} de la glace en considérant une valeur moyenne de la conductivité thermique de cette dernière.

5. Cette fois, on ne fait plus l'hypothèse que la conductivité thermique de la glace reste constante, montrer que l'expression de la résistance thermique est la suivante :

6. $$R_{Th} = \int_0^{1,8} \frac{0,1}{0,114x + 2,1}.dx$$

où x est l'épaisseur de glace en mètre.

7. Calculer cette résistance thermique.

8. Sachant que la valeur de la résistance thermique de la couche de la neige est $R'_{Th\ glace} = 0,088\ W.K^{-1}$, calculer la valeur de la résistance thermique de l'ensemble des deux couches.

9. Déterminer la valeur de la puissance thermique traversant les deux couches de glace et de neige.

Exercice 2

Synthèse d'un biocarburant

Comme dit précédemment, Tara se déplace uniquement en utilisant l'énergie éolienne. Mais lorsqu'il n'y a pas assez de vent, Tara utilise l'énergie chimique provenant de biocarburants.

« Un biocarburant ou agrocarburant est un carburant (combustible liquide ou gazeux) produit à partir de matériaux organiques non fossiles, provenant de la biomasse (c'est le sens du préfixe « bio » dans biocarburant) et qui vient en complément ou en substitution du combustible fossile.

Actuellement, deux filières principales existent :

- filière huile et dérivés, comme l'huile végétale carburant, le biogazole (ou biodiesel) ; mais aussi de graisses animales ou des acides gras divers (algues, etc.) ;
- filière alcool comme le bioéthanol, à partir de sucres, d'amidon, de cellulose ou de lignine hydrolysés.

Le biogazole (aussi appelé en France diester), obtenu par la transformation des triglycérides qui constituent les huiles végétales ; la transestérification de ces huiles, avec du méthanol ou de l'éthanol, produit des Esters d'Huile Végétale, respectivement méthyliques et éthyliques, dont les molécules plus petites peuvent alors être utilisées comme carburant (sans soufre, non toxique et hautement biodégradable) dans les moteurs à allumage par compression. »

(Wikipédia).

Dans cette seconde partie, nous allons étudier **la transestérification** (en milieu basique) d'un triester éthylique provenant d'acides gras. Cette réaction fait intervenir un acide gras d'origine végétale ou animale et de l'éthanol. L'éthanol a pour formule brute : C_2H_6O.

1. Quelle est l'espèce chimique caractéristique du milieu basique dans l'eau ?
2. Donner le schéma de Lewis de l'éthanol. Le triester est le trioléate de glycérol. Sa formule développée est la suivante :

$$\begin{array}{l} H_2C - O - CO - C_{17}H_{33} \\ \quad | \\ HC - O - CO - C_{17}H_{33} \\ \quad | \\ H_2C - O - CO - C_{17}H_{33} \end{array}$$

L'équation-bilan de la réaction est donnée ci-dessous :

$$\begin{array}{l} H_2C - O - CO - C_{17}H_{33} \\ \;| \\ HC - O - CO - C_{17}H_{33} \\ \;| \\ H_2C - O - CO - C_{17}H_{33} \end{array} + \begin{array}{c} \quad\; H \;\;\; H \\ \quad\; | \quad\; | \\ H - C - C - O - H \\ \quad\; | \quad\; | \\ \quad\; H \;\;\; H \end{array} \longrightarrow \text{Glycérol} + 3H_5C_2 - O - CO - C_{17}H_{33}$$

3. Donner le nom de l'espèce chimique $H_5C_2—O—CO—C_{17}H_{33}$.
4. Donner la formule développée du glycérol.

On donne ci-dessous les étapes élémentaires du mécanisme réactionnel d'une transestérification d'un ester simple.

Dans le cas du trioléate de glycéryle, la transestérification a lieu sur les trois groupes caractéristiques présents.

étape 1 : $CH_3-CH_2-\overline{O}-H$ + $H-\overline{O}|^{\ominus}$ $\longrightarrow$ $CH_3-CH_2-\overline{O}|^{\ominus}$ + H_2O

étape 2 : $R-C(=\overline{O})-\overline{O}-R'$ + $CH_3-CH_2-\overline{O}|^{\ominus}$ $\longrightarrow$ $R-C(-\overline{O}|^{\ominus})(-\overline{O}-CH_2-CH_3)(-\overline{O}-R')$

étape 3 : $R-C(-\overline{O}|^{\ominus})(-\overline{O}-CH_2-CH_3)(-\overline{O}-R')$ $\longrightarrow$ $R-C(=\overline{O})-\overline{O}-CH_2-CH_3$ + $^{\ominus}|\overline{O}-R'$

étape 4 : $^{\ominus}|\overline{O}-R'$ + $H-\overline{O}-H$ $\longrightarrow$ $R'-\overline{O}-H$ + $H-\overline{O}|^{\ominus}$

5. Compléter par des flèches courbes l'étape 2 du mécanisme élémentaire de transestérification

6. Écrire l'équation de la réaction chimique modélisant au niveau macroscopique la transestérification, modélisée au niveau microscopique par le mécanisme réactionnel écrit en 5.

7. Si l'on considère un rendement de 100 %, Calculer la masse d'éolate d'éthyle formée lors de la transestérification 2 300 kg de triéolate d'éthyle.

8. La masse volumique de l'éolate d'éthyle est ρ (éolate d'éthyle) = 880 kg/m^3, calculer le volume correspondant.

9. Expliquer l'intérêt de réaliser la synthèse de transestérification avec un excès d'éthanol.

Exercice 3

Étude d'un microscope

> « Le microbiome océanique qu'est-ce que c'est ?
> Il s'agit de tous les organismes plus petit qu'un millimètre, essentiellement unicellulaires » a expliqué Colomban de Vargas, directeur de recherche du C.N.R.S, lors d'une conférence de presse. Invisibles à l'œil nu, ces virus, bactéries, microalgues représentent plus des 2/3 de la biomasse des océans, soit quatre fois plus de la biomasse cumulée de tous les insectes sur Terre.
> Premier maillon de la chaine alimentaire, le microbiome occupe une place centrale dans l'écosystème océanique, contribuant à stocker le dioxyde de carbone (CO_2) et à produire du dioxygène (O_2), à l'instar des forêts (photosynthèse).

Dans cette partie, nous analyserons le fonctionnement d'un microscope afin d'observer des cyanobactéries.
Un microscope est un appareil constitué :

- d'un objectif assimilable à une lentille mince convergente (L_1) de vergence $C_1 = 250\ \delta$;

• d'un oculaire, lentille convergente (L_2) de vergence $C_2 = 50\ \delta$.

On appelle intervalle optique Δ, la distance fixe séparant le foyer image F_1' de l'objectif du foyer principal objet F'_2 de l'oculaire vaut : $\Delta = \overline{F_1'F_2'} = 16\ \text{cm}$

On utilise cet appareil pour observer un objet AB perpendiculaire à l'axe optique du microscope, le point A étant supposé placé sur axe.

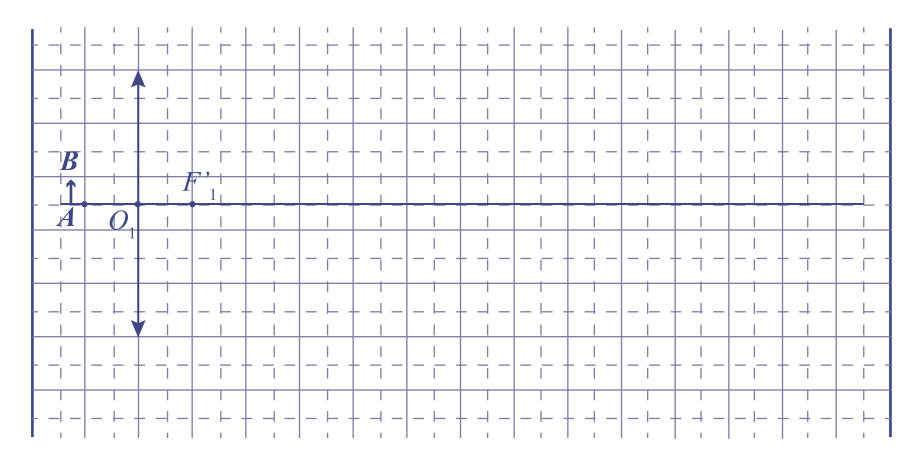
On appelle A_1B_1 l'image de AB à travers l'objectif (L_1) et A_2B_2 l'image de A_1B_1 à travers (L_2).

1. L'objet AB est une bactérie de 3,0 µm.

2. Faire un schéma permettant de déterminer le diamètre apparent θ de la spore lorsqu'elle est observée à l'œil nu à une distance $d_m = 25$ cm.

3. Calculer θ (on fera l'approximation $\tan\theta \approx \theta$). Cette bactérie est-elle observable à l'œil nu ?

Pour illustrer le principe du microscope, on utilise le schéma ci-dessous qui ne respecte pas l'échelle :



4. Construire l'image A_1B_1 de AB à travers l'objectif (L_1).

5. Où l'image A_1B_1 doit-elle se trouver pour l'oculaire si l'on veut que l'image définitive A_2B_2 soit à l'infini ?

6. Placer l'oculaire, l'objectif et ses foyers sur un schéma sans soucis d'échelle.

7. Construire l'image définitive A_2B_2 et indiquer sur le schéma l'angle θ', diamètre apparent de A_2B_2.

8. Calculer la distance entre l'objectif et l'image O_1A_1.

9. En déduire la distance entre l'objet observé et l'objectif.

10. Calculer la taille de l'image intermédiaire A_1B_1 et le grandissement γ_1 de l'objectif.

11. Établir l'expression de θ' en fonction de A_1B_1 et f'_2. Calculer sa valeur en faisant la même approximation qu'à la question 2.

Une des grandeurs importantes qui caractérise un microscope est son grossissement standard G, défini par le rapport : $G = \dfrac{\theta'}{\theta}$

12. Calculer le grossissement G de ce microscope.

CORRIGÉ

Exercice 1

1.

- Convection
- Conduction
- Rayonnement

2.

- S : surface (m^2)
- e : épaisseur moyenne de glace (m)
- λ_{glace} : conductivité thermique de la glace
- $R_{thermique}$ ($W.m^2.K^{-1}$)

3. Le transfert thermique se fait dans le sens eau → air. En effet, le transfert se fait toujours de la zone chaude vers la zone froide.

4. Pour répondre à cette question, il faut déterminer la profondeur moyenne de la glace. On trouve 0,9 m. Puis, à l'aide du deuxième graphique donnant la conductivité thermique de la glace en fonction de la profondeur, déterminons la conductivité thermique moyenne de la glace en utilisant la modélisation mathématique proposée. Cette dernière est :

$\bar{\lambda} = 0{,}114x + 2{,}1 \;\; où \;\; x = 0{,}90$

soit $\bar{\lambda} = 0{,}114 \times 0{,}90 + 2{,}1 = 2{,}2 \;\; W.K^{-1}.m^{-1}$

Ainsi $R_{Th} = \dfrac{e}{\lambda S} = \dfrac{1{,}8}{2{,}2 \times 10} = 0{,}082 \;\; W.K^{-1}$

5. et 6. $R_{th} = \displaystyle\int_0^{1{,}8} \frac{0{,}1}{0{,}114x + 2{,}1}\, dx = \left[\frac{0{,}1}{0{,}114} Ln(0{,}114x + 2{,}1) \right]_0^{1{,}8} \quad R_{th} = 0{,}083 \;\; W.K^{-1}$

7. $R_{thtotale} = R_{thglace} + R_{thneige} = 0{,}083 + 0{,}088 = 0{,}171 \;\; W.K^{-1}$

8. $P(W) = \dfrac{\theta_{chaud} - \theta_{froid}}{R_{th}} = \dfrac{-2 + 35}{0{,}171} = 193 \;\; W$

Exercice 2

1. L'ion hydroxyde HO^-.
2.

$$H-\overset{\displaystyle H}{\underset{\displaystyle H}{C}}-\overset{\displaystyle H}{\underset{\displaystyle H}{C}}-\overline{\underline{O}}-H$$

3. L'éolate d'éthyle.
4.

$$\begin{array}{l} H_2C-OH \\ \;| \\ HC-OH \\ \;| \\ H_2C-OH \end{array}$$

5.

étape 2 : $CH_3-CH_2-\overline{\underline{O}}|^{\ominus}$ + $R-C(=\overline{O}\backslash)-\underline{O}-R'$ ⟶ $CH_3-CH_2-\underline{O}-C(R)(\overline{O}^{\ominus})-\underline{O}-R'$

6.

$CH_3-CH_2-\overline{O}-H$ + $R-C(=\overline{O})-\underline{O}-R'$ ⟶ $R'-\overline{O}\backslash$ + $R'-C(=\overline{O})-\underline{O}-CH_2-CH_3$

7. Tout d'abord, on calcule la masse molaire du triolate de glycérol :

$$M(C_{57}H_{104}O_6) = 57\times12+104+6\times16 = 884\ \text{g.mol}^{-1}$$

Puis on calcule la quantité de matière correspondante :

$n(C_{57}H_{104}O_6) = \dfrac{m}{M} = \dfrac{2\ 300.10^3}{884} = 2\ 602\ \text{mol}$ d'éolate. Or le rendement est de 100 %, donc la quantité d'éolate d'éthyle est : n(éolate d'éthyle) = 3 × 2 602 = 7 806 mol.

Par conséquent la masse d'éolate d'éthyle est :

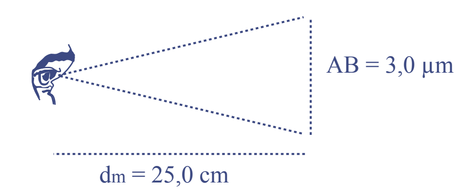
$m(C_{20}H_{38}O_2) = n\times M = 7\ 806\times310 = 2\ 420.10^3\,\text{g} = 2\ 420\ \text{kg}$.

8. $V(eolate\ d'ethyle) = \dfrac{m}{\rho} = \dfrac{2\ 420.10^3}{880} = 2\ 750\ \text{L}$

9. Pour avoir un meilleur rendement.

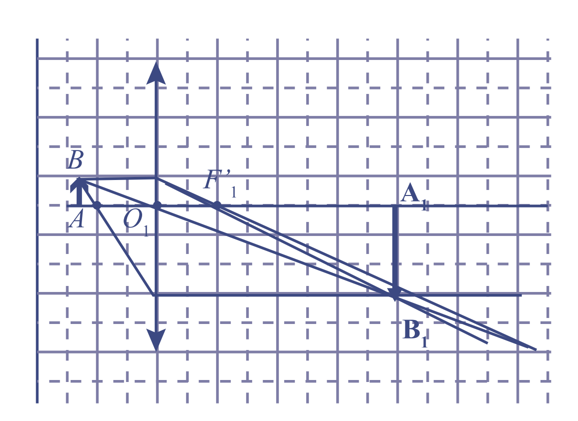
Exercice 3

1.



2. $tan\theta = \frac{AB}{2d_m} = \frac{3,0.10^{-6}}{0,25} = 1,2.10^{-5} \approx \theta$

3.



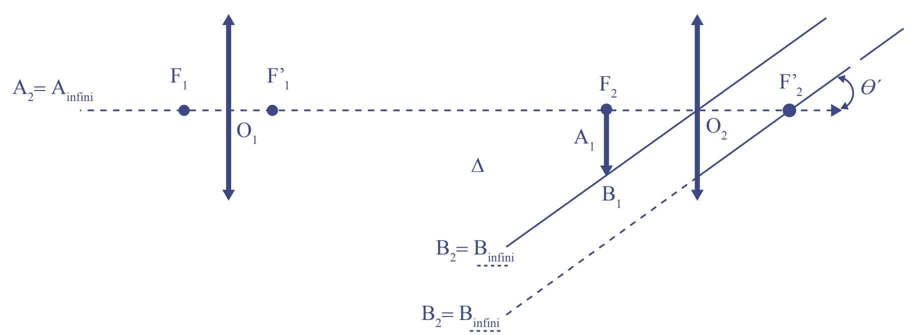
4. On utilise la relation de conjugaison à travers l'oculaire. $\frac{1}{\overline{O_2A_2}} = \frac{1}{\overline{O_2A_1}} + \frac{1}{f_2'}$

tend vers 0 lorsque A_2B_2 est à l'infini. On a alors

$$\overline{O_2A_1} = -f_2' = -\frac{1}{40} = -\ 0,025\ \text{ m}.$$

5. On doit placer l'image de A_1B_1 sur le foyer de la deuxième lentille.

6. et **7.**



Les valeurs numériques doivent être obtenues par le calcul et non par mesure graphique.

8. $\overline{O_1A_1} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A_1} = \overline{O_1F_1'} + \overline{F_1'F_2} + \overline{F_2A_1} = f_1' + \Delta + 0 = 16,4 \text{ cm}$

9. On utilise la relation de conjugaison à travers l'objectif :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{f_1'} \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{f_1'} = \frac{1}{0,164} - 250 = -\ 243,9$$

Soit $\overline{O_1A} = -\dfrac{1}{243,9} = -\ 4,1.10^{-3}\, m = -\ 4,1 \text{ mm}$

10. $\gamma_1 = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = -\ \dfrac{164}{4,1} = -\ 40$

11. Expression de θ' en fonction de A_1B_1 et f_2 : $tan\theta' \approx \theta' = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{f_2'}$.

Valeur de θ' :
On calcule tout d'abord $\overline{A_1B_1}$: $\overline{A_1B_1} = \gamma_1 \times \overline{AB} = 40 \times 3 \ \mu\text{m} = 120 \ \mu\text{m}$

Puis on calcule θ' : $\theta' = \dfrac{120.10^{-6}}{\dfrac{1}{250}} = 0,030 \text{ rad}$

12. Le grossissement de ce microscope est $G = \dfrac{\theta'}{\theta} = \dfrac{0,030}{1,2.10^{-5}} = 2\ 500$

Annales 2021

Sciences de la Vie et de la Terre/Biologie Écologie

- La durée conseillée pour ce sujet est d'une heure.
- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.
- Aucun document n'est autorisé.
- L'usage du téléphone ou de tout autre objet communicant est interdit.

Exercice 1

Les interactions biotiques dans les écosystèmes agricoles (8 points)

▶ Cas de la production de coton

Au Bénin (Afrique de l'Ouest), les producteurs de coton doivent affronter un insecte ravageur de cette culture, la Noctuelle (*Helicoverpa armigera*. La femelle de la noctuelle pond ses œufs sur les feuilles ou les fleurs des cotonniers, feuilles et fleurs qui seront consommées par les futures larves issues de ces œufs. Cette consommation réduit alors beaucoup la production de coton. Faute de moyens financiers suffisants, ces agriculteurs n'utilisent pas d'insecticide, mais mobilisent le sorgho - une autre plante - pour piéger doublement ce ravageur. Le sorgho va d'une part attirer les femelles de noctuelle qui vont alors délaisser le coton pour venir pondre préférentiellement dans le sorgho. D'autre part, le sorgho va attirer des micro-guêpes capables de pondre dans les œufs de noctuelle, tuant ainsi ces œufs. En cultivant quelques plants de sorgho à l'intérieur ou autour d'une parcelle de cotonniers, les agriculteurs parviennent à conserver une production de coton satisfaisante.

1. Quel est le nom de l'interaction biotique qui a lieu entre la larve de Noctuelle et le cotonnier ?
2. Quel est le nom de l'interaction biotique utilisée par les producteurs de coton, et qui s'établit entre la noctuelle et les micro-guêpes ?
3. Réaliser un schéma représentant les différents protagonistes de cette production agricole et leurs interactions.
4. Comment nomme-t-on de telles relations interspécifiques - ou fonctions écologiques - lorsqu'elles sont utiles à l'Homme et limitent par exemple l'usage de produits phytopharmaceutiques de synthèse pouvant nuire à l'environnement ?

▶ Cas de la production de maïs

Dans certaines parcelles de maïs, en France notamment, les agriculteurs souhaitent lutter contre les plantes adventices (couramment nommées mauvaises herbes) puisqu'une trop forte présence de plantes adventices réduit le rendement de maïs parfois très fortement. Certains agriculteurs souhaitent également limiter les apports d'engrais azotés de synthèse dans leurs champs de maïs -les engrais étant très coûteux- et préfèrent semer dans les champs de maïs des plantes de la famille des Fabacées (ou Légumineuses) telles que la Vesce cultivée (*Vicia sativa*). Des bactéries (du genre *Rhizobium*, généralement présentes naturellement dans les sols, s'associent aux racines de la Vesce en formant des nodosités dans lesquelles la bactérie fixe le N_2 présent dans le sol et dans l'air (71 % de N_2 dans l'air ambiant) pour le transformer en azote ammoniacal (NH_3) directement assimilable par la Vesce. En retour, la Vesce apporte l'énergie nécessaire à la synthèse des nodosités et à leur fonctionnement. Aussi, une partie de cet azote ammoniacal est relargué dans le sol via les racines de la Vesce, le rendant disponible pour le maïs et limitant les besoins en engrais azotés.

5. Quel est le nom de l'interaction biotique qui s'opère entre le maïs et les plantes adventices ? D'après vos connaissances, quelles sont les principales ressources impliquées dans cette interaction ?
6. Quel est le nom de l'interaction biotique impliquant la Vesce cultivée et la bactérie assimilatrice de N_2 ?

Exercice 2

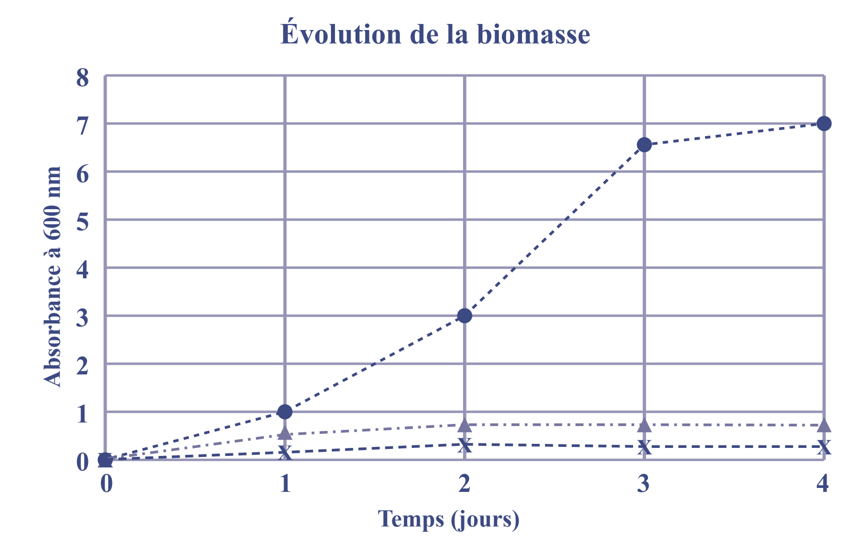
Mixotrophie de microalgues vertes en milieu fermé (14 points)

Les microalgues vertes, notamment les chlorelles, sont des organismes unicellulaires eucaryotes capables d'autotrophie et/ou d'hétérotrophie, qui présentent de nombreux intérêts économiques.

1. Par quels métabolismes, associés entre eux, les chlorelles sont-elles capables de produire des composés réduits et de l'énergie chimique en absence et en présence de lumière ? Expliciter les échanges de matière et la production d'énergie chimique.

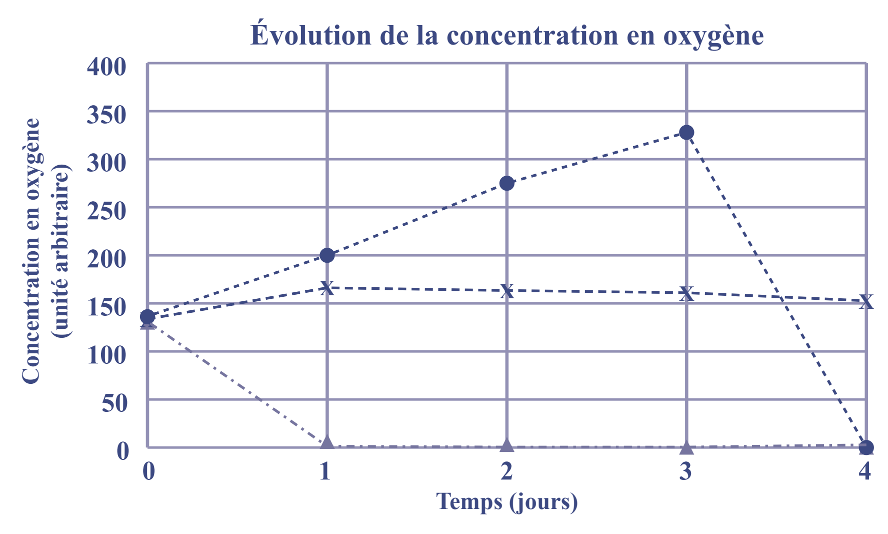
Dans ce travail, le comportement de cultures liquides de chlorelles en flacons hermétiquement fermés de 60 mL contenant 60 mL de milieu de culture a été décrit en conditions autotrophe (présence de lumière), mixotrophe (présences de glucose dans le milieu de culture et de lumière) et hétérotrophe (présence de glucose dans le milieu de culture et absence de lumière).

Des analyses de la croissance (évolution de la biomasse par mesure de l'absorbance à 600 nm) et de la composition du milieu de culture (oxygène dissous) ont été réalisées (respectivement Document 1a et Document 1b).



Document 1a : *Suivi de la croissance des chlorelles*

Suivi de la croissance des chlorelles (évolution de la biomasse par mesure de l'absorbance à 600 nm) en fonction du temps, sous 3 conditions : conditions mixotrophiques (…●…), conditions autotrophiques (- - x - -), conditions hétérotrophiques (-.- ▲ -.-).



Document 1b : *Évolution de la concentration en oxygène*

Évolution de la concentration en oxygène dans le milieu en fonction du temps, sous 3 conditions : conditions mixotrophiques (…●…), conditions autotrophiques (- - x - -), conditions hétérotrophiques (-.- ▲ -.-).

2. À partir de l'expérience réalisée, expliquer les métabolismes mis en œuvre par les chlorelles pour chacun des différents types trophiques et conduisant (ou pas) à la production de biomasse. Pourquoi une production significative de biomasse n'est observée qu'en mixotrophie ?

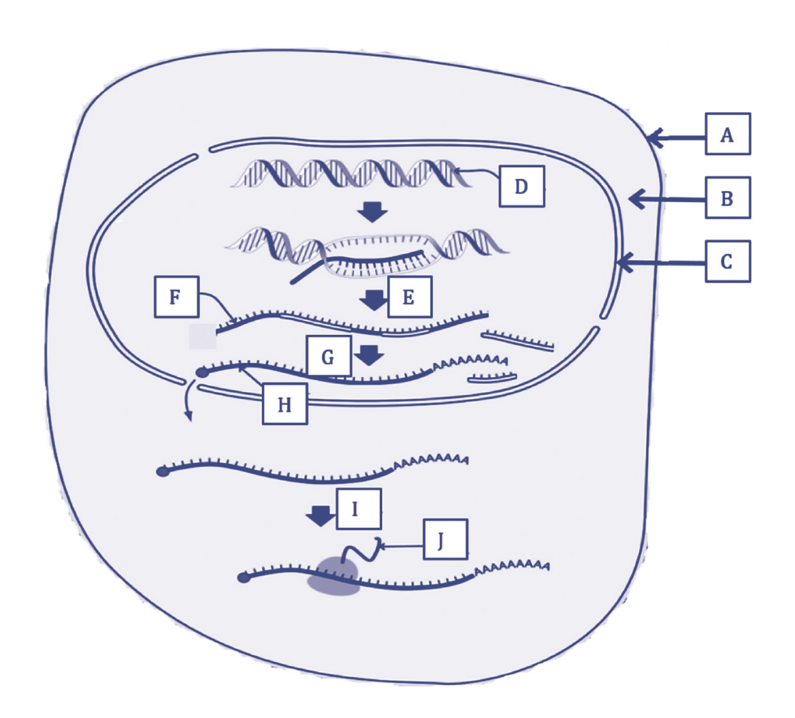
Exercice 3

Un traitement contre le VIH : l'IDC16 (18 points)

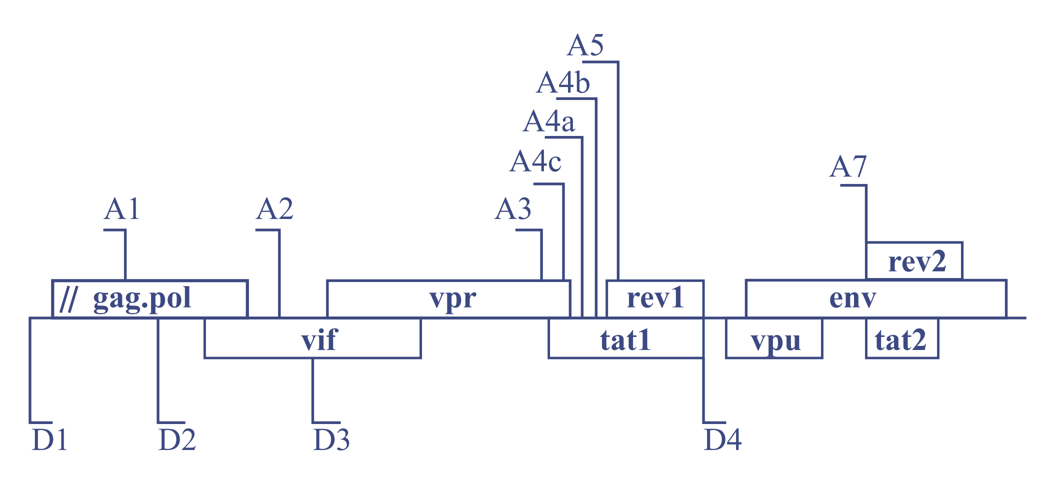
Quand un virus infecte une cellule, il utilise la machinerie cellulaire de la cellule qu'il infecte pour reproduire son matériel génétique et synthétiser ses protéines. En effet, cette infection passe par une intégration du matériel génétique du virus à celui de la cellule hôte. Cette dernière exprime ainsi le matériel génétique du virus en même temps que le sien.

1. Indiquer directement sur le document réponses, quels structures ou processus sont indiqués par les lettres A à J sur le schéma ci-dessous présentant les étapes de l'expression génétique.

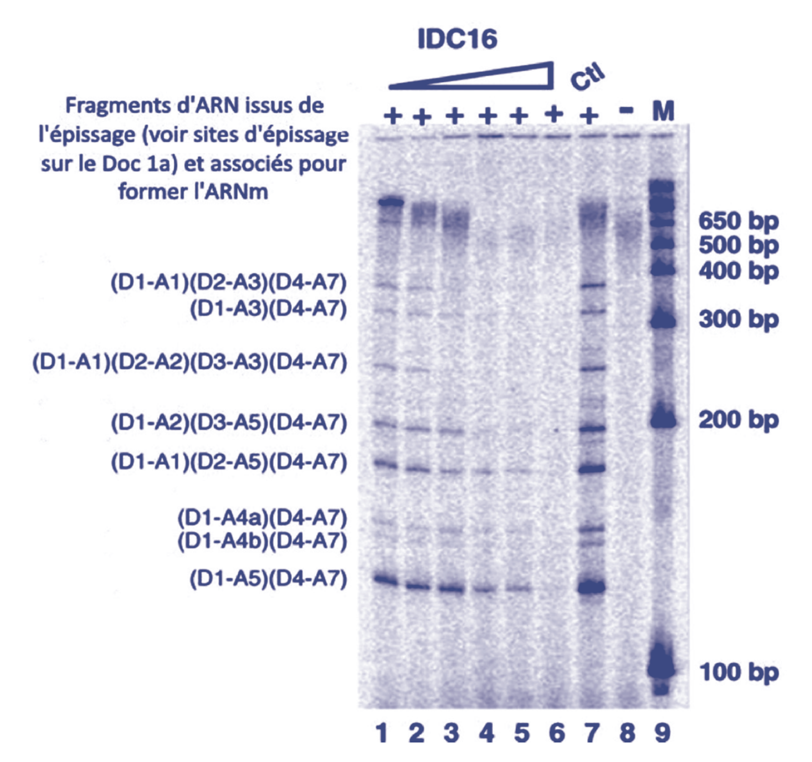
Un des traitements pour lutter contre le VIH, virus responsable du SIDA, utilise une molécule nommée IDC16. Les documents qui suivent permettent de comprendre comment cette molécule bloque la réplication virale.



Documents 2 : *Effet du traitement à l'IDC16 sur des cellules infectées par le VIH*



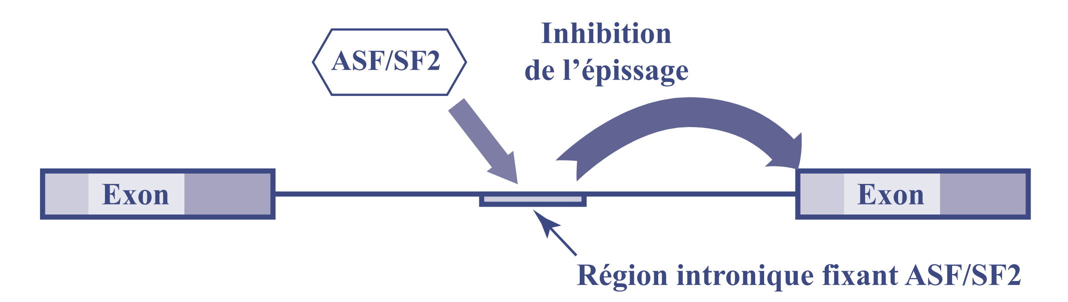
Document 2a : *Représentation schématique du génome du VIH.*
Les différents gènes sont encadrés (ils ont la particularité de se chevaucher) et les sites d'épissage de ces gènes sont indiqués par les lettres A (Al à A7) et D (Dl à D4).



Piste 1 à 6 : Cellules traitées avec 0,05 µM, 0,1 µM, 0,5 µM, 1 µM, 2,5 µM ou 5 µM de composé IDC16.
Piste 7 : Cellule non traitée.
Piste 8 : Cellules non infectées.
Piste 9 : Marqueurs de taille (en pb = paires de bases).

Principe de l'électrophorèse : elle permet de séparer des molécules chargées, ici des fragments d'ARNm, après leur déplacement dans un champ électrique.

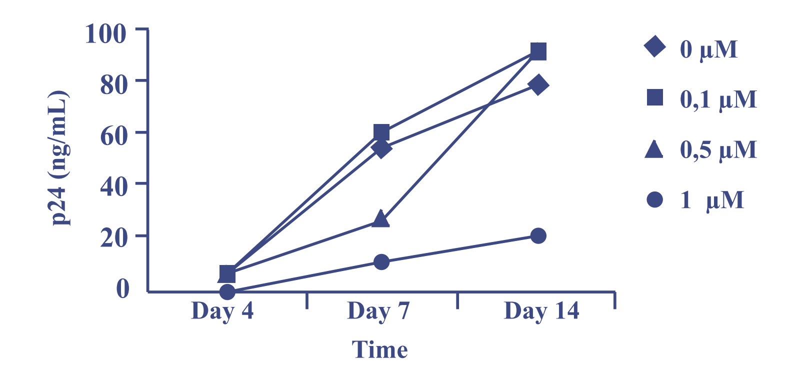
Document 2b : *Électrophorèse sur gel de polyacrylamide des produits de l'épissage alternatif de l'ARN pré-messager des gènes du VIH extraits de cellules infectées par le VIH.*



Document 2c : *La fixation de la protéine ASF/SF2 sur des régions introniques inhibe l'utilisation de sites d'épissage (voir ci-après). L'IDC16 bloque l'épissage des exons dépendant d'une région intronique fixant ASF/SF2.*

1. Dans l'expérience du document 2b, indiquer la (ou les) piste(s) de l'électrophorèse correspondant à des témoins. Justifier l'intérêt de ce(s) témoin(s).
2. À l'aide des documents 2a, 2b et 2c, indiquer l'effet de l'IDC16 sur l'expression du génome viral.

La protéine p24 est une protéine virale entrant dans la composition de la nucléocapside du virus. Des chercheurs ont dosé les quantités de cette protéine dans des cultures de cellules infectées par le virus.



Document 3 : *Quantité de la protéine virale p24 en l'absence ou en présence de 0,1 µM, 0,5 µM ou 1 µM d'IDC16.*

3. Faire le lien entre les résultats des expériences des documents 2 et 3 et indiquer si ces résultats sont cohérents entre eux.
4. Indiquer à quelle étape de l'expression génétique, proposé dans le schéma de la question 1, IDC16 agit, expliquant ainsi le blocage de la multiplication du virus.

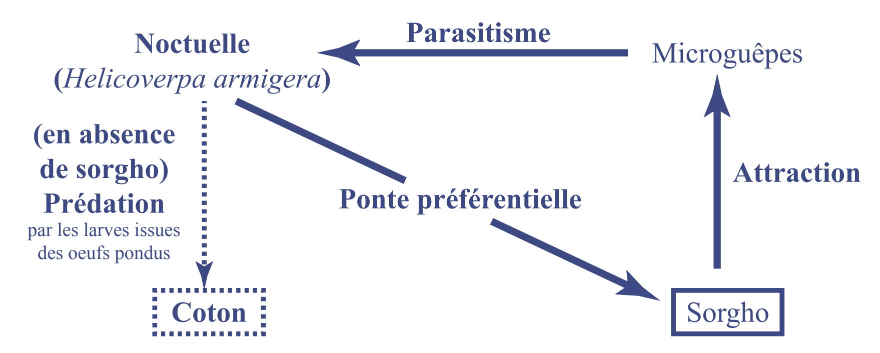
CORRIGÉ

Exercice 1

Les interactions biotiques dans les écosystèmes agricoles

▶ Cas de la production de coton

1. L'interaction biotique qui a lieu entre la larve de Noctuelle et le cotonnier est nommée « **prédation** », « **phytophagie** » ou « **herbivorie** ».
2. L'interaction biotique utilisée par les producteurs de coton qui s'établit entre la noctuelle et les micro-guêpes se nomme « **parasitisme** ».
3.



Document 4 : *Organigramme des différents protagonistes intervenant dans les cultures de coton au Bénin et de leurs interactions*

4. Ces relations interspécifiques - ou fonctions écologiques - utiles à l'Homme et qui limitent l'usage de produits phytopharmaceutiques de synthèse pouvant nuire à l'environnement sont qualifiées de « **lutte biologique** » ou « **services écosystémiques** ».

▶ Cas de la production de maïs

5. L'interaction biotique qui s'opère entre le maïs et les plantes adventices est qualifiée de « **compétition** » (ou « **concurrence** ») pour la **lumière**, **l'eau** et les **éléments minéraux** qui sont les principales ressources impliquées dans cette interaction.
6. L'interaction biotique impliquant la Vesce cultivée et la bactérie assimilatrice de N_2 est une association à bénéfice réciproque nommée « **symbiose** » ou « **mutualisme** ».

Exercice 2

Mixotrophie de microalgues vertes en milieu fermé.

1. En présence de lumière, la chlorelle est capable de réaliser la photosynthèse, une réduction du CO_2 (permettant la synthèse de glucides) et une oxydation de H_2O (avec libération de O_2), permettant la production d'ATP (énergie chimique) et de composés réduits ($NADPH,H^+$).
2. **En l'absence de lumière**, la chlorelle pratique la **respiration cellulaire** responsable de **l'oxydation des nutriments carbonés** (ex : glucose) couplée à la réduction de l'O_2 (en produisant H_20) **en produisant de l'ATP** (énergie chimique) et des composés réduits ($NADPH,H^+$). C'est la **phosphorylation oxydative**.
3. En **autotrophie** : les contenants sont totalement remplis, ce qui évite la présence de gaz dans le haut des flacons qui sont hermétiquement fermés. Ainsi, **les chlorelles ne peuvent pas faire de photosynthèse,** car il n'y a pas de CO_2.Il n'y a donc aucune production de biomasse ni changement de la concentration en O_2.
4. En **hétérotrophie** : **la respiration cellulaire peut commencer,** car les chlorelles consomment l'O_2 présent (la concentration en O_2 chute), puis **au jour 1, la respiration s'arrête,** car il n'y a plus suffisamment d'O_2 et la production de biomasse s'arrête à son tour. En **mixotrophie** : dans ces conditions, les chlorelles réalisent **simultanément photosynthèse et respiration**. Les deux voies s'alimentent mutuellement : les chlorelles produisent de l'O_2 grâce à la **photosynthèse** alors que la **respiration** utilise l'O_2 produit. Cependant, **les deux voies ne sont pas équilibrées** : la photosynthèse domine sur les 3 premiers jours (production de biomasse et augmentation de la concentration en O_2), puis c'est la respiration qui domine (chute de la concentration en O_2 et baisse de la production de biomasse). Cette modification au jour 3 est due à une **opacification de la culture** induite par l'augmentation de la biomasse dans le flacon. Cette opacification réduit l'entrée de la lumière ce qui limite donc à son tour la photosynthèse. De plus, il se produit également dans ces conditions une **production de composés oxygénés toxiques**, tels que des **radicaux libres** qui détruisent les chloroplastes (bonus).

Exercice 3

Un traitement contre le VIH : l'IDC16

1.

A	B	C	D	E
Membrane plasmique	Cytoplasme	Noyau	ADN	Transcription

F	G	H	I	J
Pré-ARNm	Maturation	ARNm	Traduction	Protéine

1. Les pistes de l'électrophorèse correspondant à des **témoins** (dépôts identifiés) sont les pistes 7 et 8 :

   ▶ Lorsqu'on compare la piste 7 (cellules non traitées à l'IDC16) aux pistes 1 à 6, on peut observer les **effets du traitement à l'IDC16 sur les cellules infectées**.

   ▶ Lorsqu'on compare la piste 8 (cellules non infectées) à la piste 7, on peut observer **les effets de l'infection sur les cellules**.

   ▶ La piste 9 n'est pas un témoin, seulement une piste indiquant les marqueurs de taille, c'est-à-dire des molécules d'ARN de tailles précises et connues.

2. Grâce à l'électrophorèse, on observe une disparition progressive des ARNm (pistes 1 à 5 du doc 2b) qui est proportionnelle à la concentration de l'IDC16, amenant jusqu'à une disparition totale de tous les ARNm quand la concentration d'IDC16 est maximale (piste 6 du document 2b). D'après le document 2b, on peut donc penser que le traitement à l'IDC16 affecte soit la maturation soit la transcription. Le document 2c montre que l'IDC16 bloque l'épissage d'exons qui dépend d'une région intronique fixant elle-même ASF/SF2 lors de la maturation de l'ARN pré-messager. Or le document 2a indique qu'il existe de nombreux sites d'épissage. Ainsi, suite au traitement à l'IDC16, on pourrait expliquer la disparition des ARNm par une **inhibition de l'épissage des ARN pré-messagers provoquée par l'IDC16.**
3. Le document 3 démontre que la concentration en protéines p24 **diminue fortement** au bout de 14 jours suite à un traitement à l'IDC16 : elle passe de **90 ng/mL** en l'absence de traitement, à **20 ng/mL** pour un traitement à **1 µM** d'IDC16. Le document 2.b montre que pour un traitement à l'IDC16 à **5 µM** (piste 6), l'épissage des ARN pré-messager est **inhibé** par cette molécule. Par conséquent, si l'ARNm n'est pas produit, la protéine ne l'est pas non plus. Pour un traitement à **1 µM d'IDC16** (piste 4 du document 2b), l'inhibition n'est pas totale ou il y a une **faible production d'ARNm** (dont les ARNm issus de la transcription du gène gag-pol à proximité du site d'épissage D1). Cela permet donc une **faible production de protéines p24** (environ 20 ng/mL d'après le document 3). Les résultats sont donc cohérents entre eux.
4. D'après le schéma de la question 1, on peut penser que **l'IDC16 agit donc sur la phase de maturation des ARNm** : la multiplication du virus est donc bloquée par l'IDC16.

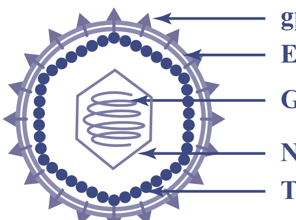
Sujet original

Sciences de la Vie et de la Terre/Biologie Écologie

- La durée conseillée pour ce sujet est d'une heure.
- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.
- Aucun document n'est autorisé.
- L'usage du téléphone ou de tout autre objet communicant est interdit.

Exercice 1

Aspects de la réaction immunitaire (14 points)



Document I : *structure du virus Epstein-Barr (EBV)*

Le virus d'Epstein-Barr (EBV) infecte 90 % de la population mondiale et persiste à vie de façon asymptomatique chez les adultes infectés. On sait que ce virus infecte spécifiquement certains lymphocytes.

1. Que signifie le terme « asymptomatique » ?
2. Quelle est l'origine de l'enveloppe du virus ?
3. L'EBV est-il un rétrovirus comme le VIH ? Justifier.
4. Expliquer brièvement pourquoi un virus infecte spécifiquement une cellule.

On cherche à déterminer les lymphocytes hôtes de l'EBV en étudiant son activité. Les résultats sont décrits dans le tableau 1 ci-après.

Tableau 1

Activité de l'EBV dans le lymphocyte	LT CD4	LT CD4 mémoire	LB	LB mémoire	LT CD8
État du virus	Inactif	Inactif	Actif	Latent	Inactif
Exposition de peptides viraux à la surface du lymphocyte	Non	Non	Oui	Occasionnellement	Non
Bourgeonnement	Non	Non	Oui	Occasionnellement	Non

5. Quelle conclusion est apportée par ces résultats ?

6. Émettre une hypothèse pouvant expliquer la persistance du virus dans l'organisme ?

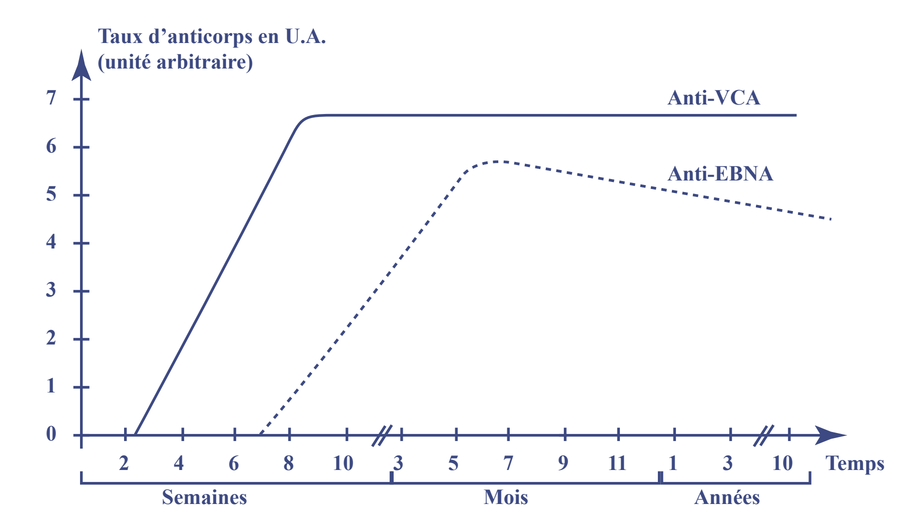
On cherche à comprendre comment l'organisme lutte contre l'EBV. Dans un premier temps, on réalise des expériences dont les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous. Des lymphocytes (LB et LT) sont prélevés sur différents individus et sont ensuite transférés dans des boîtes de Pétri contenant un milieu de culture.

Tableau 2

Expériences	Protocoles	Résultats
1	LT provenant d'un individu infecté par l'EBV Milieu 1 : LB infectés par l'EBV	**100% des LB lysés**
2	LT provenant d'un individu infecté par l'EBV Milieu 2 : LB non infectés	**Aucun LB lysé**
3	LT provenant d'un individu infecté par l'EBV Milieu 3 : LB mémoires infectés par l'EBV	**Aucun LB lysé**
4	LT provenant d'un individu infecté par l'EBV Milieu 4 : LB infectés par un autre virus	**Aucun LB lysé**
5	LT provenant d'un individu non infecté par l'EBV Milieu 5 : LB infectés par l'EBV	**Aucun LB lysé**

7. En utilisant vos connaissances, mais sans analyser ces expériences, interpréter les résultats

Dans un second temps, on pratique des analyses sérologiques régulières de patients infectés. Les résultats sont présentés dans le **document 2** ci-après.



Document 2 : *variation des taux d'anticorps chez des personnes infectées*

On précise que VCA et EBNA sont des peptides de l'EBV.

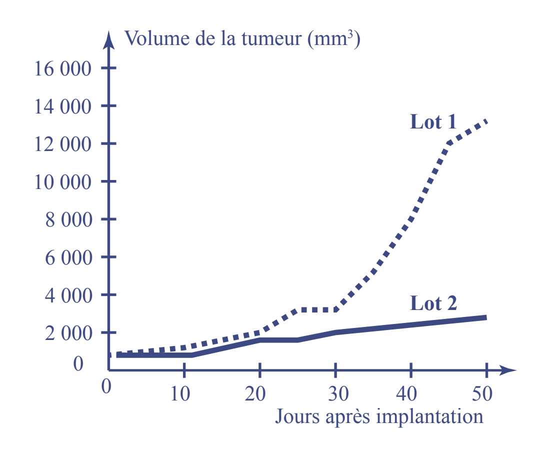
8. Analyser et interpréter ces résultats.

Exercice 2

Effets du THC sur les défenses immunitaires lors d'un cancer (14 points)

Le cannabis est une drogue qui produit des effets sur le cerveau par le biais du THC (tétrahydrocannabinol), mais cette molécule possède d'autres effets sur l'organisme.

Les chercheurs ont fait des découvertes en testant du THC sur des lots de souris au cours de 5 expériences.

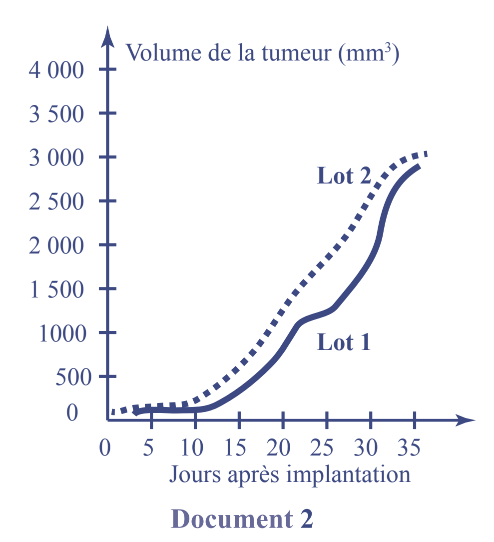


Expérience 1 : *on implante des cellules cancéreuses sur les souris des deux lots et on mesure la taille de la tumeur 3 fois par semaine : les résultats sont représentés sous forme de graphe dans le document I.*

Document I

Lot 1 : souris recevant des injections régulières de THC (4 fois par semaine)

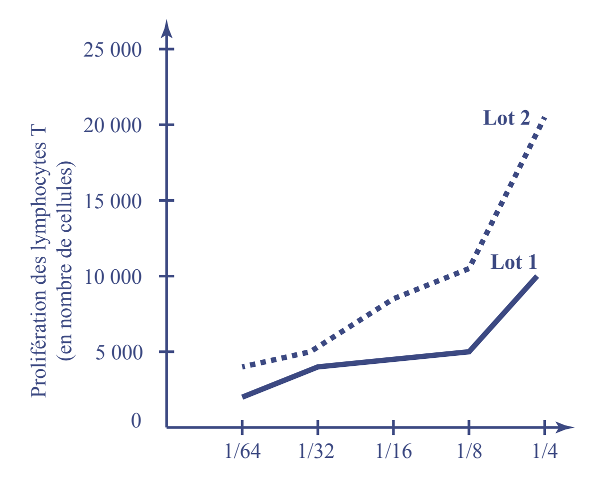
Lot 2 : souris témoins non traitées au THC



Document 2

Expérience 2 : *on réalise la même expérience que précédemment, mais sur des souris immunodéficientes, car ne possédant pas de lymphocytes T. Les résultats sont représentés sous forme de graphe dans le document 2.*

1. Après analyse des deux documents, tirez deux informations essentielles quant à la relation entre le THC et la tumeur.



Expérience 3 : *on évalue la prolifération des lymphocytes T dans les organismes des souris des deux lots : résultat dans le document 3.*

Document 3 : *proportion de cellules tumorales implantées par rapport au nombre de lymphocytes T avant prolifération (exemple : 1/64 : 1 cellule tumorale pour 64 lymphocytes T)*

2. Indiquez l'information supplémentaire apportée par ces résultats. Justifiez brièvement.

Expérience 4 : *8 souris des deux lots sont immunisées contre cette tumeur suite à un contact avec les cellules tumorales irradiées et subissent une implantation d'un nombre variable de cellules cancéreuses. On compte ainsi le nombre de souris rejetant la tumeur : résultats dans le document 4.*

Nombre de cellules cancéreuses implantées	Nombre de souris rejetant la tumeur/ nombre total de souris	
	Lot 1 : souris traitées au THC	Lot 2 : souris témoins
1×10^5	8/8	8/8
2×10^5	5/8	8/8
3×10^5	4/8	8/8

Document 4

3. Formulez une ou des hypothèses pouvant expliquer l'action du THC sur le système immunitaire.

Expérience 5 : *on dose des molécules intervenant dans les réactions immunitaires.*

Effets du THC sur les sécrétions de cytokines		
	IL-10 (pg/mL)	**IL-2 (pg/mL)**
Lot 2 (témoin)	819	1 230
Lot 3 (traité au THC)	1 491	1 235

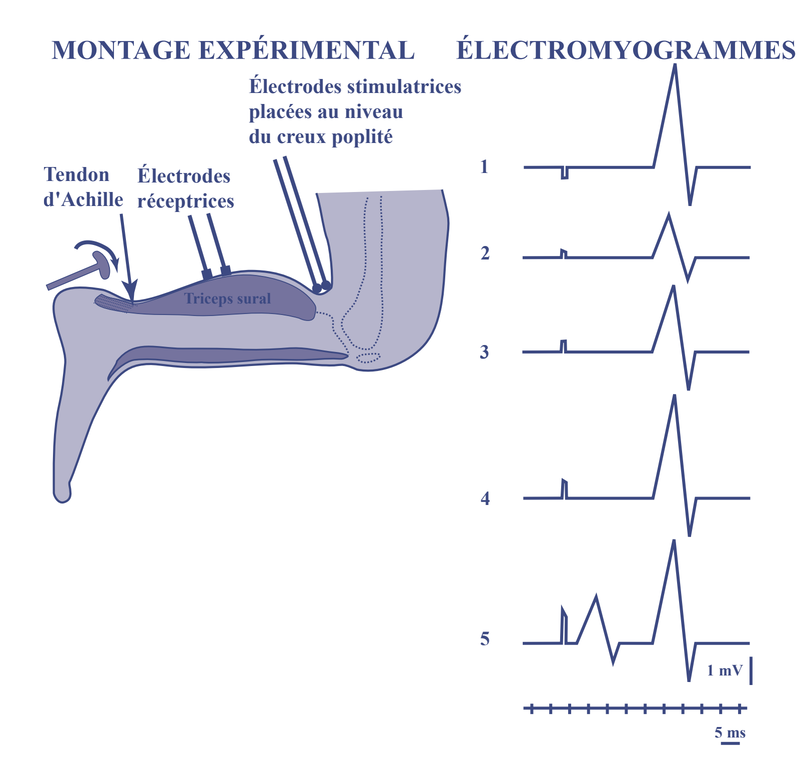
4. À partir de vos connaissances et de l'étude du tableau, donnez une explication à l'action du THC sur les tumeurs.

Exercice 3

Étude de l'activité électrique du triceps sural lors du réflexe achilléen (12 points)

On place une électrode stimulatrice au niveau du creux poplité. Elle permet de délivrer, à travers la peau, des stimulations d'intensité variable, stimulant le nerf sciatique. Le nerf sciatique est un nerf mixte qui innerve le triceps sural du mollet (**document I**).

On place par ailleurs, sur le revêtement cutané du mollet, au-dessus du triceps sural, deux électrodes réceptrices connectées à un dispositif d'amplification et d'enregistrement de différences de potentiel. Elles permettent d'enregistrer les différences de potentiel qui traduisent l'activité électrique du triceps sural. Les tracés de l'électromyogramme sont reportés sur le **document I**. Le **tracé 1** correspond à une percussion du tendon d'Achille. Les **tracés 2, 3, 4 et 5** correspondent à des stimulations électriques percutanées du nerf sciatique d'intensité croissante.



Document I : *montage expérimental et électromyogrammes correspondants*

1. Que représente le tracé 1 ? Justifiez.
2. Réalisez le schéma titré et légendé de manière précise du circuit nerveux emprunté.
3. Analysez et expliquez les tracés 2, 3 et 4.
4. Une stimulation plus forte fait apparaître le tracé 5. Analysez et expliquez.
5. Quelle sera la conséquence sur le tracé 5 d'une section ancienne de la racine ventrale en rapport avec le nerf ?
6. Quelle sera la conséquence sur le tracé 5 d'une section ancienne de la racine dorsale en rapport avec ce nerf ?

CORRIGÉ

Exercice 1

Aspects de la réaction immunitaire

1. « Asymptomatique » signifie que l'infection par l'EBV n'entraîne aucun symptôme visible (fièvre, migraine…) dans 90 % des cas.
2. Les virus sont des parasites intracellulaires obligatoires. Ainsi, lorsqu'ils sortent d'une cellule pour en infecter une autre, les virus enveloppés utilisent l'enveloppe de la cellule hôte pour s'en constituer une. L'enveloppe du virus est donc formée d'une fraction de la membrane cytoplasmique de la dernière cellule infectée.
3. L'EBV est un virus dont le matériel génétique est exclusivement composé d'ADN. Or, tous les rétrovirus comme le VIH possèdent un génome constitué uniquement d'ARN. L'EBV n'est donc pas un rétrovirus.
4. Un virus est un parasite intracellulaire obligatoire qui doit d'abord se fixer sur sa cellule cible pour se multiplier à l'intérieur avant de sortir de cette cellule et d'aller infecter de nouvelles cellules cibles. Le virus doit donc être capable de se fixer sur une molécule membranaire présente à la surface de sa cellule cible. Pour cela, le virus possède à sa surface des récepteurs (glyco-)protéiques (gp 42) responsables de la reconnaissance spécifique du marqueur membranaire de sa cellule cible et non d'un autre type cellulaire.
5. D'après le tableau 1, on peut constater que seuls les lymphocytes B permettent au virus EBV d'être actif de se développer. L'exposition de peptides viraux à la surface des LB signifie que les virus utilisent tout le matériel cellulaire de protéosynthèse du LB (ARN polymérase, ribosomes, appareil de Golgi…) pour synthétiser leurs propres protéines. De plus, les nouveaux virions parviennent à bourgeonner à la surface des LB, c'est-à-dire qu'ils parviennent à sortir des LB pour en infecter de nouveaux. Le LB est donc la cellule cible de l'EBV. Le LB mémoire est un LB activé. Le bourgeonnement occasionnel des EBV à la surface des LB mémoires signifie que le virus est déjà à l'état latent à l'intérieur de la cellule. Cela confirme la nature de la cible de l'EBV : le LB.
6. Les EBV se développent à l'intérieur des LB qui sont des cellules immunitaires importantes pour la réponse immunitaire à médiation humorale. Pour expliquer la persistance du virus dans l'organisme, on peut émettre l'hypothèse que l'EBV, en exprimant très peu de marqueurs viraux à la surface du LB infecté (cas des LB mémoires qui contiennent des virus à l'état latent), est rendu difficilement détectable par les lymphocytes T8 chargés de surveiller l'état des cellules nucléées par l'intermédiaire des CMH I. Cette sous-expression de protéines virales peut ainsi permettre aux EBV de rester à l'état latent et d'être indétectables par les lymphocytes T8.

7. On peut observer dans le tableau 2 que les seules cellules qui sont détruites par des lymphocytes LT cytotoxiques (présents uniquement chez les personnes infectées par un virus) sont des cellules qui possèdent obligatoirement **le même CMH** (= cellules du soi) et qui sont obligatoirement infectées par le virus qui a donné naissance au LTc en question. Les LTc possèdent en effet des récepteurs membranaires, les **TCR**, qui possèdent cette **double spécificité**. Un LTc qui est spécifique d'une cellule infectée (LB) par un virus donné ne peut donc détruire que **cette cellule infectée par ce virus** ou bien une autre cellule du **même individu** et infectée par le **même virus**. Tout autre LB infecté par un autre virus ne sera donc pas lysé puisque le TCR du LTc ne sera pas compatible avec le peptide présenté par le CMH I du LB infecté (ou non infecté).
8. On peut constater que la synthèse d'anticorps spécifiques d'antigènes (VCA et EBNA) de l'EBV présente une certaine inertie (deux à sept semaines), ce qui laisse le temps à l'EBV de se multiplier très rapidement dans l'organisme. De plus, la synthèse d'anticorps anti-EBNA est **peu durable** alors que la synthèse d'anticorps anti-VCA est constante dans le temps à partir de huit semaines : cela traduit la stimulation permanente des lymphocytes B par l'EBV à l'issue de l'infection. **L'EBV est donc persistant dans l'organisme après une infection**. Cette dernière, même très ancienne au dépistage, peut être détectée à tout moment. Le résultat sera fiable en raison de la **persistance des anticorps anti-VCA pendant le reste de la vie du patient** puisque l'EBV continue à stimuler le système immunitaire tout au long de la vie du patient (mis en évidence par la synthèse permanente d'anticorps anti-VCA).

Exercice 2

Effets du THC sur les défenses immunitaires lors d'un cancer

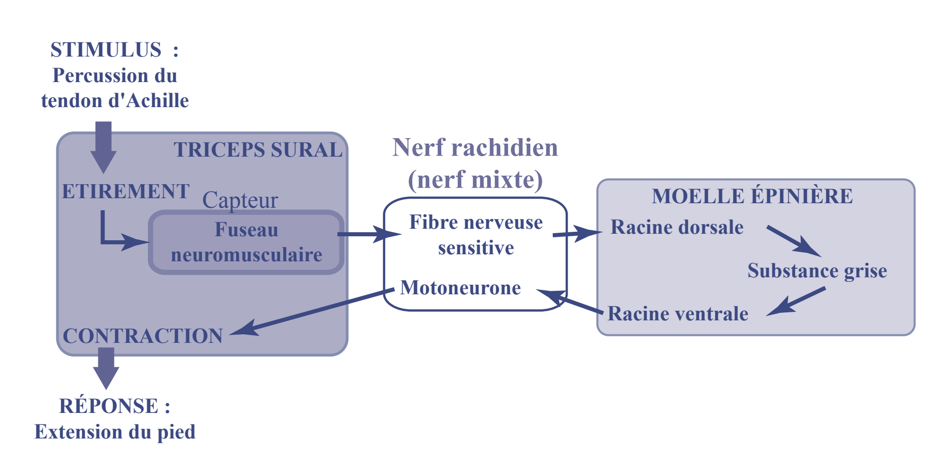
1. Le **document I** montre que les souris du lot 1 traitées au THC ont développé une tumeur d'un volume près de 7 fois supérieur par rapport aux souris non traitées par le THC. **Le THC est donc un agent stimulant le développement des tumeurs cancéreuses,** car l'effet observé est rapide (14 jours) et important. On peut penser que cet effet se fait soit par action stimulatrice directe sur la tumeur, soit par une action inhibitrice du système immunitaire chargé d'inhiber le développement de la tumeur.
2. Le **document 2** permet d'observer l'absence de différences significatives entre les deux lots de souris, traitées et non traitées d'une part et entre les souris normales (souris non immunodéprimées du lot 2 du document I) et les souris immunodéprimées du lot 2 du document 2. En effet, on peut observer que dans les deux documents, au bout de 35 jours, les souris sans LT développent une tumeur d'une taille équivalente. **On peut donc penser que l'effet du THC sur la défense antitumorale étant reproduit par une absence des lymphocytes T, le THC agirait comme un immunosuppresseur, stimulant indirectement le développement de la tumeur en bloquant la réponse immunitaire spécifique à médiation cellulaire.**

3. Le **document 3** montre que dans tous les cas, la courbe correspondant aux souris traitées par le THC est plus basse que celle du lot 1 (témoin sans traitement par le THC) : les souris traitées au THC présentent une prolifération des LT qui est plus faible par rapport aux animaux témoins, **indépendamment de la présence de cellules cancéreuses en grande proportion (1/4) ou en faible proportion (1/64)** : **le THC est donc bien une molécule qui agit comme un immunosuppresseur de la réponse immunitaire à médiation cellulaire**.
4. On observe dans **l'expérience 4** que quel que soit le nombre de cellules tumorales implantées, elles sont efficacement rejetées par toutes les souris. En revanche, cet effet protecteur du système immunitaire disparaît chez les souris traitées au THC lorsque le nombre de cellules cancéreuses implantées augmente : **le THC agit bien comme un véritable surpresseur de la réponse immunitaire. Le THC est bien un immunosuppresseur.**
5. Alors que l'IL-2 est une interleukine stimulant la prolifération cellulaire des LT8 activés, l'IL-10 est une interleukine qui a une action inhibitrice (immunosuppressive) sur la prolifération cellulaire des LT. Or, on observe dans **l'expérience 5** que l'IL-2 ne subit aucune variation significative lors du traitement par le THC. En revanche, la sécrétion d'IL-10 est presque doublée : le THC est une molécule douée d'une **tumorigénicité qui s'explique par sa capacité à stimuler la libération d'IL-10 immunosuppressive par une catégorie de lymphocytes T auxiliaires (LTh2) et d'autres cellules (monocytes, mastocytes…) à action anti-inflammatoire.** C'est cette action anti-inflammatoire de l'IL-10 qui permet finalement aux cellules cancéreuses de mieux proliférer sous l'influence du THC du cannabis.

Exercice 3

Étude de l'activité électrique du triceps sural lors du réflexe achilléen

1. Le tracé 1 représente la **variation d'activité électrique extérieure globale du triceps sural en réponse à la stimulation (extension) du triceps sural** après un choc avec un marteau sur le tendon d'Achille. Il s'agit donc d'une activité extérieure globale qui résulte de la totalité des activités des fibres musculaires excitées lors de la réponse motrice du muscle à l'étirement provoqué.
2. Les deux phases dans la courbe résultent des dépolarisations successives des deux électrodes de mesure de surface en raison de l'activité contractile du muscle.



Document 2 : *circuit nerveux emprunté par le message nerveux créé lors d'une percussion du tendon d'Achille (arc réflexe du réflexe d'extension du pied ou « réflexe achilléen » ou « réflexe calcanéen »)*

3. Les tracés 2, 3 et 4 résultent de stimulations électriques au niveau du creux poplité. Après chaque stimulation, on enregistre une activité électrique globale en deux vagues (chacune correspondant **au même évènement électrique global, mais à deux endroits différents sur le muscle**) dont l'amplitude varie en fonction de l'intensité de stimulation du nerf sciatique. En effet, **plus la stimulation du nerf sciatique sera forte et plus le nombre de fibres nerveuses motrices stimulées sera grand,** entraînant ainsi une contraction du triceps sural **et donc une activité électrique globale mesurée (résultant des dépolarisations des fibres musculaires) d'autant plus importante**.
4. Lorsqu'on stimule plus fort le nerf sciatique, on observe une deuxième vague de dépolarisation qui apparaît plus tôt (moins de 5 ms plus après la stimulation électrique) que celle qui était mesurée précédemment. **Il s'agit ici de l'enregistrement électrique global correspondant à l'excitation directe du muscle par la stimulation** électrique. En effet, le muscle est un tissu contractile et excitable qui peut être directement excité par stimulation électrique (quand la stimulation est suffisante). La suite de l'enregistrement est identique au 4 en délai, en forme et en amplitude : **sur les enregistrements 4 et 5, toutes les fibres musculaires répondent au maximum de leur capacité après transport du message nerveux excitateur le long du nerf sciatique**.
5. Après section de la racine ventrale, on n'obtiendrait sur le graphique que la première partie de l'enregistrement 5 (après 5 ms) : **seule l'excitation électrique directe motrice du nerf sciatique serait directement efficace sur la contraction du triceps sural**.
6. On obtiendrait **le même résultat que précédemment** (disparition de la deuxième partie de l'enregistrement). Pour mettre en évidence une différence entre les deux résultats de section (racines ventrale ou dorsale), il faudrait stimuler les fibres nerveuses au niveau de la moelle épinière pour mettre en évidence les voies afférentes et efférentes mises en jeu dans ce réflexe.